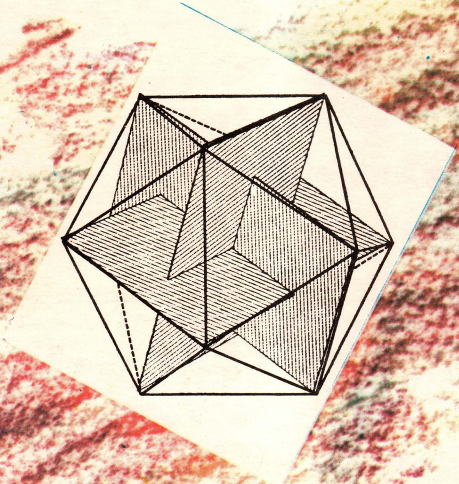
نظریهٔ
ساختمان‌های هندسی

آگوست آدلر

ترجمهٔ پرویز شهریاری



اگوست آدلر

ترجمهٔ پرویز شهریاری

نظریهٔ
ساختمان‌های هندسی

انتشارات فردوس: خیابان مجاهدین اسلام، شمارهٔ ۲۶۲ ـ تلفن: ۳۰۲۵۳۳

نظریهٔ ساختمانهای هندسی

آگوست آدلر

ترجمه : پرویز شهریاری

تیراژ : ۳۷۰۰ نسخه

چاپ : چاپخانه خوشه

چاپ اول : ۱۳۶۸ ـ تهران

صفحه‌آرا : حسن نیک‌بخت

فهرست

پیشگفتار ۷

مقدمه ۹

مسأله‌های هندسی و حل آن‌ها به کمک پرگار و خط‌کش

یادداشت‌های تاریخی ۲۰

فصل اول. روش‌های حل مسأله‌های ساختمانی هندسه ۲۵

§۱. روش تجزیه و تحلیل جبری ۲۶

§۲. روش مکان‌های هندسی ۳۳

§۳. روش شکل‌های متشابه ۴۳

§۴. روش شکل‌های کمکی ۴۵

§۵. روش تبدیل شکل‌ها ۴۷

§۶. روش انعکاس ۶۰

§۷. بررسی‌های فضایی، وسیله‌ای برای حل مساله‌های ساختمانی هندسه ۸۲

§۸.حل تقریبی مساله‌های ساختمانی ۹۷

فصل دوم. ساختمان‌های هندسی، تنها به کمک رسم خطهای راست، به‌شرطی که‌از شکل‌های مفروض استفاده‌کنیم (روش‌شتینر) ۱۰۱

§۹. مقدمه ۱۰۱

§۱۰. ساختمان‌هایی که، تنها با رسم خطهای راست و به شرط مفروض بودن دو خط راست موازی، عملی هستند ۱۰۳

§۱۱. ساختمان‌هایی که تنها با رسم خطهای راست و به کمك متوازی الاضلاع مفروض، انجام می‌شوند ۱۰۸
§۱۲. ساختمان‌هایی که می‌توان آن را، تنها بـا رسم خطهای راست به‌انجام رسانید، وقتی که یك مربع داده شده‌باشد ۱۰۹
§۱۳. رسم شکل‌ها، تنها به کمك خطهای راست، وقتی که یك دایرهٔ ثابت و مرکز آن مفروض باشد ۱۱۱

فصل سوم. ساختمان‌های هندسی، به‌کمك‌رسم دایره‌ها(ساختمان‌های ماسکه رونی) ۱۲۱
§۱۴. پیش قضیه ۱۲۱
§۱۵. تقسیم محیط دایره به بخش‌های برابر ۱۲۲
§۱۶. ضرب و تقسیم پاره خطها ۱۲۶
§۱۷. جمع و تفریق پاره خطها. رسم موازی‌ها و عمودها ۱۳۲
§۱۸. رسم پاره خطهای متناسب ۱۳۴
§۱۹. برخورد خط راست بـا دایره و با خط راست. ضرب و تقسیم زاویه‌ها ۱۴۰
§۲۰. کاربرد اصل‌شعاع‌های معکوس، درحل‌مساله‌های ساختمانی درجه دوم، تنها به کمك پرگار ۱۴۲
§۲۱. ساختمان هندسی به کمك پرگار ثابت ۱۵۳

فصل چهارم. ساختمان‌های هندسی به‌کمك خط‌کش بادو لبهٔ موازی (دو خط راست موازی با فاصلهٔ متحرك). ساختمان‌های هندسی به‌کمك زاویهٔ متحرك. ساختمان‌هـای هندسی به کمك زاویهٔ دلخواه متحرك. ساختمان‌های هندسی به‌کمك خط‌کش و پاره‌خط ثابت (مقیاس طول). ساختمان‌های هندسی به کمك نیمسازنگار ۱۵۵
§۲۲. مقدمه ۱۵۵
§۲۳. ساختمان‌های هندسی به کمك خط‌کش که دو لبهٔ موازی دارد (دو خط راست موازی با فاصلهٔ ثابت α) ۱۵۸
§۲۴. ساختمان‌هاسی هندسی، به‌کمك زاویهٔ قائمه ۱۶۳

§۲۵.ساختمان‌های هندسی، به کمك زاویهٔ دلخواه ۱۶۶
§۲۶. ساختمان‌های هندسی، به کمك خط کش یك لبه و
پاره‌خط ثابت ۱۷۰
§۲۷. ساختمان‌های هندسی، به کمك نیمسازنگار ۱۷۶
فصل پنجم. مسأله‌های درجهٔ اول و درجهٔ دوم ۱۸۱
§۲۸. پیش قضیه‌هایی از هندسهٔ تصویری ۱۸۱
§۲۹. رده‌بندی مساله‌های ساختمانی هندسه ۱۹۶
§۳۰. مسأله‌های مجسم درجهٔ اول و درجهٔ دوم ۱۹۹
§۳۱. مسأله‌های متریك درجهٔ اول و درجهٔ دوم ۲۰۶
§۳۲. حل نموداری معادلهٔ درجهٔ دوم ۲۰۹
فصل ششم. اثبات ناممکن‌ها ۲۱۵
§۳۳. مقدمه ۲۱۵
§۳۴. ناممکن بودن تعیین مطلق‌های صفحه به کمك عمل‌های
مجسم رسم ۲۱۶
§۳۵. اثبات ناممکن بودن حل مسألهٔ درجهٔ دوم به کمك
رسم خط‌های راست و انتقال پاره خط‌ها ۲۱۷
§۳۶. اثبات ناممکن بودن حل دقیق آن مساله‌های هندسی که‌به
معادله‌های درجهٔ سوم غیر قابل تبدیل منجر می‌شوند: به
کمك رسم خط‌های راست و دایره‌ها ۲۲۱
§۳۷. امکان یا عدم امکان حل مساله‌های هندسی به کمك
پرگار و خط کش ۲۲۹
فصل هفتم. تقسیم دایره
رسم چند ضلعی‌های منتظم ۲۳۵
§۳۸. مقدمه ۲۳۵
§۳۹. تصویر هندسهٔ عددهای مختلط ۲۳۶
§۴۰. ریشه‌های واحد ۲۳۸
§۴۱. رسم پنج‌ضلعی و ده‌ضلعی منتظم ۲۴۱
§۴۲. هفت‌ضلعی و نه‌ضلعی منتظم ۲۴۵

§۴۳. رسم هفده ضلعی منتظم ۲۴۷
§۴۴. قضیه‌هایی دربارهٔ امکان رسم چندضلعی‌های منتظم ۲۶۵
فصل هشتم. حل مساله‌های ساختمانی درجهٔ سوم و درجهٔ چهارم ۲۶۹
§۴۵. تضعیف مکعب (مسالهٔ دهلون) ۲۶۹
§۴۶. تثلیث زاویه ۲۷۹
§۴۷. حل نموداری معادله‌های درجهٔ سوم و درجهٔ چهارم ۲۹۰
§۴۸. حل معادلهٔ درجهٔ سوم، به کمك دو زاویهٔ قائمه ۲۹۹
§۴۹. رسم هفت‌ضلعی و نه‌ضلعی منتظم به کمك دو زاویهٔ قائمه ۳۰۲
§۵۰. مساله‌های مجسم درجهٔ سوم و درجهٔ چهارم ۳۰۴
فصل نهم. یادداشت‌های تاریخی دربارهٔ تربیع دایره.
راه حل تقریبی مساله. روش بالا بردن دقت رسم ۳۰۷
§۵۱. یادداشت‌های تاریخی دربارهٔ تربیع دایره ۳۰۷
§۵۲. راست کردن تقریبی محیط دایره ۳۱۰
§۵۳. قاعده‌هایی برای بالا بردن دقت رسم ۳۱۶
فصل دهم. خوش رسمی ۳۱۹
§۵۴. فرض‌های لوموان (*Lemoine*) ۳۱۹
§۵۵. بررسی اقتصادی فرض‌های لوموان و تعمیم آن‌ها ۳۲۲
§۵۶. مسأله‌ها و تمرین‌ها ۳۲۷
یادداشت‌ها ۳۴۳

پیشگفتار

یکی از زیباترین راه‌ها، برای تکامل تفکر منطقی، حل مسأله‌های ساختمانی است. با وجود این، برنامه‌های دبیرستانی کمتر از آن چه لازم است، به این بخش از هندسه اهمیت می‌دهند. شاید یکی از علت‌های این کم توجهی این باشد که دبیران ریاضی به‌منابع مطمئن و آموزنده‌ای درنظریهٔ ساختمان‌های هندسی دسترسی ندارند. در این مورد، ترجمهٔ کتاب اوگوست آدلر[1] که نظریهٔ مسأله‌های ساختمانی را در همهٔ بعدهای آن مطرح کرده است، می‌تواند سودمند باشد. در این کتاب، علاوه بر تحلیل روش ساختمان‌های هندسی به کمک پرگار و خط کش، درمورد ساختمان‌هایی هم که تنها با یکی از وسیله‌ها و یا با

استفاده از وسیله‌های اضافی دیگر انجام می‌گیرد، و همچنین دربارهٔ مسأله‌های حل نشدنی، با دقت و به صورتی منظم بحث شده است.

من این کتاب را سی سال قبل، وقتی که دانشجوی دانشگاه بودم، از آلمانی به روسی ترجمه کردم و استاد آن زمان من، پروفسور س. ا. شاتونووسکی، مقدمه‌ای بر آن نوشت. در این مقدمه، دیدگاه‌های او دربارهٔ ویژگی‌های مسأله‌های ساختمانی و ماهیت حل آن‌ها منعکس شده‌است. دربرخی موردها، یادداشت‌هایی (به وسیلهٔ من و پروفسور شاتونووسکی) به کتاب اضافه شده است. این یادداشت‌ها را، که با شماره مشخص شده‌اند، درپایان کتاب آورده‌ایم.

لنین‌گراد ـ سپتامبر

پروفسور گریگور میخائیلوویچ فیختن‌گولتس

مقدمه

مساله‌های هندسی و حل آن‌ها به‌کمك پرگار و خط‌کش

برای طرح نظریهٔ مساله‌های ساختمانی هندسهٔ مقدماتی، باید قبل از هر چیز، با تعریف مساله و مضمون آن آشنا شویم. مساله یعنی چه و، در حالت کلی، چه مضمونی دارد؟ تعریف زیر، اگرچه ممکن است کامل و بی‌نقص نباشد، به اندازهٔ کافی کلی و عام است.

مساله، یعنی «پیدا کردن» چیزهای «مجهول» به‌کمك چیزهای دیگری که «معلوم»اند، از راه ارتباطی که بین «مجهول‌ها» و «معلوم‌ها» وجود دارد.

در تعریفی که برای مساله ارائه دادیم، فرض را بر این گرفته‌ایم که همهٔ اصطلاح‌های موجود در آن (به جز خود اصطلاح «مساله») مشخص و تعریف شده‌اند، یا به دلیل روشنی معنای آن‌ها (یا به خاطر توافق همگان)، بدون تعریف مورد قبول قرار گرفته‌اند. با وجود این، به اصطلاح‌هایی که در داخل گیومه (« ») گذاشته‌ایم، بیشتر توجه می‌کنیم: «پیدا کردن»، «معلوم»، «مجهول». بدون این که به ماهیت این چیزها کار داشته باشیم، در هرمساله با دو نوع «چیز» سروکارداریم (که ممکن است «چیزهایی» مشخص و یا انتزاعی باشند).

نوع اول، معرف چیزهای معلوم است. دربارهٔ آن‌ها می‌توان گفت: داده شده‌اند، در دسترس ما هستند، مفروض‌اند. این دسترسی، ممکن است

مستقیم باشد و ممکن است از راه مشاهــده و تجزیــه و تحلیل درك مستقیم، حاصل شود.

برعکس، دربارهٔ «چیزهای» نوع دوم می گــویند: مفروض نیستند، در دسترس قرار ندارند، «مجهول»هایی هستند کــه بایدآن‌ها را پیدا کرد (در حساب محاسبه‌کرد ودرهندسه رسم یا اثبات‌کرد و، به‌طورکلی، کشف‌کرد).

وقتی مجهول پیدا شد، ازنوع دوم «چیزها» به‌نوع اول منتقل‌می‌شود، بنا براین پیداکردن یعنی‌توانائی‌تبدیل«چیزهای» مجهول به«چیزهای» معلوم. کاملاً روشن است، اگردرمساله‌ای، موقعیت یاامکان تحقق‌انتقال نوع مجهول به نوع معلوم وجــود نداشته باشد؛ آن وقت خود مسالــه، بدون مضمون و اصطلاح «پیداکردن» بی‌معنا می‌شود.*

به این ترتیب، درهر دانشی، یا حتی در هر مساله‌ای، اصطلاح «پیدا-کردن» می‌تواند معنای خاص خــود را داشته باشد. ولی در هر حال، آن را باید به مفهومی گرفت که بتواند شرایط تبدیل مجهول به معلوم را مشخص کند. این شرایط، معمولاً، به‌میزان و نوع آگاهی ویا حالت درك ما بستگی دارد، ولی گاهی ممکن است به صورت جنبه‌ای از توافق باشد. در حالت اخیر، می‌توان شرایط موجود را با شرایط دیگری عوض‌کرد، به شرطی‌که مجموعهٔ توافق‌ها و قراردادهای پذیرفته شده، دارای تناقض منطقی نباشند. در هر حال، هر گز نمی‌توان، بدون هیچ شرطی، مجهول را بــه معلوم تبدیل کرد، زیرا بدون چنین شرط‌هایی، مساله، معنای خود را از دست می‌دهد.

مثلاً اگر A، تقسیم پاره خط راست MN را به دو بخش برابر، به B پیشنهادکند، قبل ازآن که B به حــل مساله بپردازد، باید بداند کــه منظور A از نصف کــردن پاره خط راست چیست و با چه شرط‌هایی، نقطهٔ O را

---

*) فرض کنید مجهول x، وقتی و تنها وقتی قابل پیدا کردن باشدکه حادثهٔ α روی دهد. می‌توان ایــن پرسش را مطرح کرد: چه نشانه‌هایی مثل β وجود داشته باشد تا حادثهٔ α روی دهد؛ سپس، چه نشانه‌هایی مثل γ، گواه بروجود نشانه‌های β است و غیره. به هر حال فرض بر این است که: در هر حالتی، در تحقق یا عدم تحقق این شرط تردیدی نداریم‌که، با توجه به‌آن، عبور از مجهول به معلوم، ممکن یا ناممکن است.

وسط پاره خط راست MN به حساب می‌آورد، زیرا در غیر ایـن صورت، به هر نحوی که B استدلال یا عمل کند، A می‌تواند آن را مردود بداند و ادعا کند که نقطهٔ O، وسط پاره خط راست MN، پیدا نشده است. در عمل، اگر پاره‌خط راست MN رسم یا به وسیلهٔ دو نقطهٔ انتهایی آن مشخص شده باشد، وقتی نقطهٔ O را پیدا شده بـه حساب می‌آورند کـه با نشانهٔ خاصی مشخص شده یا سوزن پرگار درآن‌جا قرارگرفته باشد. در هندسه، تنها وقتی می‌توان گفت نقطهٔ O پیدا شده است که بتوان، بـه کمك روش‌های کاملاً معینی(که درزیردربارهٔ آن‌ها صحبت خواهیم کرد)، به‌آن دسترسی پیدا کرد.

پیش‌فرض‌هایی که برای قبول حقیقتی ازیك موقعیت پذیرفته می‌شوند، یا شرایطی که در صورت وجودآن‌ها، مجهول به معلوم تبدیل می‌شود، اصل موضوع نامیده می‌شوند. اصل موضوع‌ها، پایـه‌های اصلی حل یك مساله یا گروهی از مسالـه‌هـای هـر دانش را تشکیل می‌دهند (اصل موضوع‌ها را می‌توان ابزار منطقی حل نامید).

اکنون به مساله‌های ساختمانی هندسهٔ مسطحهٔ مقدماتی می‌پردازیم و، قبل از همه، از اصل موضوع‌هایی نام می‌بریم که، معمولاً، شالوده‌ای برای حل آن‌ها هستند. یادآوری می‌کنیم کـه در هندسهٔ مقدماتی، تنها مفهوم‌های زیر مورد استفاده قرار می‌گیرند:

۱. نقطه، خط راست، پاره خط راست، دایـره وکمان‌های آن. این مفهوم را،نمادها یا تصویرهای اصلی می‌نامیم.

۲. مجموعه‌ای از تصویرهای اصلی.

۳. بخش متناهی یا نامتناهی (مثـل زاویـه) از صفحه کـه محدود به تصویرهای اصلی باشند.

و قبول می‌کنیم.

اصل موضوع I. خط راست و پاره‌خط راست را وقتی، و تنها وقتی، مفروض (یعنی رسم شده) به حساب می‌آوریم که دو نقطه از خط راست یا دو انتهای پاره خط، مفروض باشد.

اصل موضوع II. دایره را وقتی، و تنها وقتی، مفروض بـه حساب می‌آوریم که مرکز آن و دو نقطه‌ای که شعاع آن را معین می‌کنند، مفروض

باشند (یکی از این دو نقطه می‌تواند مرکز ودیگری، نقطه‌ای از محیط دایره باشد). کمان دایره را وقتی، و تنها وقتی، مفروض بـه حساب می‌آوریم که مرکز و دوانتهای آن مفروض باشند.

اصل موضوع III. یك نقطه وقتی مفروض است که محل برخورد دو خط راست مفروض باشد.

اصل موضوع IV. یك نقطه وقتی مفروض است که محل برخورد یك خط راست مفروض با یك دایرهٔ مفروض باشد.

اصل موضوع V. یك نقطه وقتی مفروض به حساب می‌آید که محل برخورد دو دایرهٔ مفروض باشد.

اصل موضوع VI. هر شکل را وقتی مفروض به‌حساب می‌آوریم‌که همهٔ تصویرهای اصلی تشکیل دهندهٔ آن، یا همهٔ تصویرهایی کـه آن را محصور کرده‌اند، ساخته شده باشند.

در رسم، یعنی وقتی‌که به جای نمادهای هندسی، با نمایش نموداری آن‌ها سر و کار داریم، این اصل موضوع‌ها به کمك پرگار و خط کش تحقق می‌یابند؛ در ضمن، هر یك از این دو وسیله، به صورتی مشخص مورداستفاده قرارمی‌گیرند؛ به‌کمك خط‌کش، نمایش نموداری خط راست (با دراختیار داشتن نمایش نموداری نقطه‌ها) و به کمك پرگار، نمایش نموداری دایره (با در اختیار داشتن نمایش نموداری مرکز و شعاع آن) به دست می‌آید. پرگار و خط‌کش، کاربرد دیگـری در ارتباط با دو اصل مـوضـوع اول، ندارند. اصل موضوع‌های III تا V، توجه مستقیم ما را به نقطه‌های مشترك خط‌های راست و دایـره‌های نموداری جلب می‌کنند. در حالتی کـه، این نقطه‌های مشترك در بیرون صفحهٔ شکل قرارگیرند و، بنابراین، مستقیماً دیده نشوند (رسم شده بـه حساب نیایند)، آن وقت بـایـد از این یا آن اصل موضوع III تا V صرف‌نظرکرد (ابتدای فصل دوم و یادداشت شمارهٔ ۷۶ را درآخرکتاب ببینید).

البته می‌توان اصل موضوع‌های دیگری را درنظر گرفت‌که یا متناظر باابزارهای دیگری برای رسم باشند ویامتناظر باروش‌های دیگری ازکاربرد پرگار و خط‌کش. برعکس، می‌توان ابزارهای رسم و روش‌های به‌کاربردن

آن‌ها را مفروض گرفت و، بعد، اصل موضوع‌های متناظر با آن‌ها را پیدا کرد (مثلاً فصل‌های دوم، سوم، چهارم و یادداشت‌های آخر کتاب مربوط به این فصل‌ها را ببینید)؛ ولی به هرحال وجود اصل موضوع‌های متناظر با ابزارهای مفروض، امری لازم است، زیرا بدون وجود آن‌ها، مساله معنای خود را از دست می‌دهد.

اصل موضوع‌هایی که در این جا آوردیم و متناظر با روش عادی استفاده از پرگار و خط کش‌اند، با فرض زیر هم ارزند. هر مساله ترکیبی از هندسهٔ مقدماتی مسطحه را وقتی حل شده به‌حساب می آوریم که بتوان آن را به حل تعداد محدودی از پنج مسالهٔ زیر منجر کرد. I. از دو نقطهٔ مفروض، خط راستی یا پاره‌خط راستی (که آن‌ها را به هم وصل می کند) بگذرانید؛ II. دایره‌ای با مفروض بودن مرکز و شعاع آن و یا کمانی از دایره با مفروض بودن مرکز و دو انتهای آن رسم کنید؛ III. نقطهٔ مشترك دو خط راست مفروض را پیدا کنید؛ IV. نقطه‌های مشترك خط راست مفروض و دایرهٔ مفروض را پیدا کنید؛ V. نقطه‌های مشترك دو دایرهٔ مفروض را پیدا کنید. برای هندسه دان فرقی نمی‌کند که این پنج مساله را چگونه حل کند. مهم این است که راه حل این پنج مساله را بداند و بتواند هر مسألهٔ دیگری را به آن‌ها منجر کند.

با پذیرفتن اصل موضوع‌های I تا VI، اکنون حل کلی ترین مسالهٔ ترکیبی هندسهٔ مقدماتی را در برابر خود قرار دهیم. از آن‌جا که هر تصویری با تعداد محدودی از نمادهای اصلی معین می‌شود، و این تصویرهای اصلی هم، به‌نوبهٔ خود، وقتی ساخته‌شده به‌حساب می آیند که چند نقطهٔ مشخص کنندهٔ آن‌ها پیدا شده باشد، بنابراین، می‌توان پذیرفت که هر تصویر هندسی با دستگاهی از نقطه‌ها داده می‌شود و، در نتیجه، رسم یك تصویر هندسی، یعنی پیدا کردن دستگاهی از نقطه‌ها. بنابراین، کلی ترین مسالهٔ ترکیبی را می‌توان به این ترتیب بیان کرد:

با مفروض بودن دستگاه نقطه‌های $P_1(P'_1, P''_1, \ldots, P_1^{(h)})$، که شامل تعداد محدودی از نقطه‌های P'_1، P''_1، ...، $P_1^{(h)}$ است، می‌خواهیم دستگاه محدود دیگری از نقطه‌های $Q(Q', Q'', \ldots, Q^{(k)})$ بسازیم، به‌شرطی

که دستگاه اخیر در شرط‌هایی که از پیش تعیین شده است، صدق کنند.

نقطه‌های P_1'، . . .، $P_1^{(h)}$ از دستگاه مفروض اول را، نقطه‌های دستهٔ اول می‌نامیم. همهٔ تصویرهایی را که، به کمك اصل موضوع‌های I تا VI، می‌توان و باید ساخت، پیدا می‌کنیم. با وجود این، می‌توان ازاصل‌موضوع VI صرف‌نظر کرد واین پرسش را در برابر خود قرار داد: اگر اصل موضوع‌های I تا V را بپذیریم و دستگاه نقطه‌های P_1 را در اختیار داشته باشیم، کدام تصویرهای اصلی را می‌توانیم و باید بسازیم؟ وقتی که این مساله‌حل‌شد، باید همهٔ‌تصویرهایی راکه از تصویرهای اصلی تشکیل شده‌اند و یا به وسیلهٔ تصویرهای اصلی محصور شده‌اند، رسم شده به حساب آوریم.

اصل موضوع‌های III تا V ازچنان تصویرهای اصلی صحبت‌می‌کنند که، با مفروض بودن خط‌های راست و دایره‌ها، باید رسم شده به حساب آیند. وقتی که این اصل موضوع‌ها را در مورد دستگاه P_1 به کار می‌بریم، هیچ چیز مستقیمی نمی‌توان از آن‌ها به‌دست آورد. به‌کمك اصل موضوع I هم، تنها می‌توان و باید همهٔ خط‌های راست l_1 و همهٔ پاره‌خط‌های راست λ_1 را ــ که به وسیلهٔ همهٔ زوج نقطه‌های دستهٔ اول معین می‌شوند ــ رسم‌شده به حساب آورد. این خط‌های راست و پاره‌خط‌های راست را، خط‌ها و پاره‌خط‌های راست دستهٔ اول می‌نامیم. اکنون، به کمك اصل موضوع II، می‌توان هردایرهٔ O_1 را که مرکزش در یکی از نقطه‌های دستهٔ اول وشعاعش برابر یکی از پاره‌خط‌های دستهٔ اول باشد، رسم شده به حساب آورد. این دایره‌ها را هم، دایره‌های دستهٔ اول می‌نامیم.

به این ترتیب، اکنون داریم:

$$\text{دستهٔ اول}\left\{\begin{array}{ll} P_1 & \text{نقطه‌های} \\ l_1 & \text{خط‌های راست} \\ \lambda_1 & \text{پاره‌خط‌های راست} \\ O_1 & \text{دایره‌های} \end{array}\right.$$

اکنون، با قبول اصل موضوع‌های III تا V می‌توانیم و باید، همهٔ نقطه‌های غیر از نقطه‌های دستگاه P_1 را، که از برخورد خط‌های راست و

دایره‌های دستهٔ اول به‌دست می‌آیند، رسم شده به‌حساب‌آورد. این نقطه‌های P_2 را، نقطه‌های دستهٔدوم می‌نامیم. به‌همین ترتیب، به‌کمك اصل‌موضوع‌های I و II، می‌توانیم خطهای‌راست l_2، پاره‌خطهای راست λ_2 دایره‌های O_2 از دستهٔ دوم و، سپس، نقطه‌های P_3 از دستهٔ سوم و غیره را بسازیم.

به این ترتیب، اگر از دستگاه نقطه‌های P_1 آغاز کنیم، به کمك اصل موضوع‌های I تا V، می‌توان و بایدهجموعهٔ نقطه‌های دسته‌های P_2، P_3،... را، و تنها همین مجموعهٔ نقطه‌ها را، رسم شده به‌حساب آورد. اگر نقطه‌های مجهول Q، در میان نقطه‌های P_1، P_2، P_3، . . . وجود داشته باشند، به‌معنای آن است که مسالهٔ مفروض، به ازای ایــن اصل موضوع‌ها، قابل حل است و اگر نقطه‌های Q در بیــن نقطه‌های P_1، P_2، P_3، . . . پیدا نشوند و، در ضمن، این رشته را هم نتوان ادامه داد، به‌معنای آن است که مسالهٔ مفروض، جواب ندارد. این موضوع را بیشتر توضیح می‌دهیم.

اگر نقطه‌های دستگـــاه‌های P_1، P_2، . . . تمامی صفحه را نپوشانند، به نحوی که یك یا چند نقطهٔ q در روی صفحه وجود داشته باشد که متعلق به هیچ کدام از دسته‌های P_1، P_2، . . . نباشند، آن وقت، هر مساله‌ای که درآن، تنها نقطه‌های P_1 داده شده است، و دست‌کم یکی ازنقطه‌های مجهول در بین نقطه‌های q باشد، گوییم مسالهٔ ما به‌کمك اصول موضوع‌های‌مفروض، قابل حل نیست؛ اگرچه ممکن است به کمك اصل موضوع‌های دیگری قابل حل باشد. مثلاً (درحالتی که شرایط مساله در مورد نقطهٔ q متناقض با یکدیگر نباشند)، می‌توان به‌عنوان یك اصل موضوع پذیرفت که، وقتی نقطه‌های P_1 مفروض‌اند، نقطهٔ q هم نقطه‌ای مفروض به‌حساب آید؛ در چنین حالتی مسالهٔ ما، که نقطه یا نقطه‌های q مجهول آنند، به کمك اصل موضوع‌های پذیرفته‌شده، قابل حل است.

درکتاب‌آدلر، مثال‌های زیادی وجود داردکه مساله‌ای با برخی اصل موضوع‌هــا قابل حل نیست، در حالی‌که با قبول اصل موضوع‌های دیگری قابل حل می‌شود (مثلاً، §§ ۳۵، ۴۵، ۴۶، ۴۹ و ۵۱ را ببینید).

در بالا مسیری را نشان دادیم کــه می‌توان با تعقیب آن، و با قبول اصل موضوع‌های عادی، جواب مساله را پیدا کرد، البته به شرطی‌که مسالهٔ

مفروض به کمك این اصل موضوع‌ها قابل حل باشد.

مثلاً، مسالهٔ نصف کردن پاره‌خط راستی را مطرح می کنیم که به‌وسیلهٔ دو نقطهٔ انتهائی A و B آن داده شده است. تصویر مجهول، عبارت است از نقطهٔ C، که پاره خط AB را نصف می کند. پاره‌خط AB، خط راست AB، دایرهٔ $A(AB)$ (دایرهٔ بـه مرکز A و شعاع AB) و دایرهٔ $B(AB)$، دستگاه پاره‌خط‌ها، خطهای راست و دایـره‌های دستهٔ اول را تشکیل می‌دهند. اگر M و N نقطه‌های برخورد دو دایرهٔ $A(AB)$ و $B(AB)$، و P و Q نقطه‌های برخورد دوم این دایره‌ها با خط راست AB باشند، آن وقت، نقطه‌های M، N، P و Q، دستگاه نقطه‌های دستهٔ دوم را تشکیل می‌دهند. بین ۹ خط راست و ۲۸ دایرهٔ دستهٔ دوم، خط راست MN وجود دارد که در برخورد با خط راست AB، نقطهٔ مجهول C را می‌دهد. بنابرایـن، نقطهٔ مجهول، نقطه‌ای از دستهٔ سوم است.

اکنون مسالهٔ نصف کردن کمان AB را در نظر می گیریم که به‌وسیلهٔ مرکز O و دو انتهـای A و B از آن داده شـده است. O، A و B، دستگاه نقطه‌های دستهٔ اول را تشکیل می‌دهند. سه پاره‌خط OA، OB، AB و سه‌خط راست OA، OB، AB و دایره‌های $N(PQ)$ (که مرکز N یکی از نقطه‌های O، A، B و شعاع PQ یکی از پاره‌خطهای OA، OB، AB است)،دستگاه پاره‌خطها، خطهای راست ودایره‌های دستهٔاول را تشکیل می‌دهند. نقطه‌های برخورد این تصویرها با هم (به استثنای O، A، B)، دستگاه نقطه‌های دستهٔ دوم را می‌سازند. بین این نقطه‌هـا، نقطهٔ C، برخورد دایره‌های $A(AB)$ و $B(AB)$ (کـه غیر از نقطهٔ O است) وجـود دارد. خط راست OC متعلق به دستهٔ دوم و، نقطهٔ D، محل برخورد OC با دایرهٔ $O(AB)$ (که بر کمان مفروض واقع است) متعلق به دستهٔ سوم و همان نقطهٔ مجهول مساله است.

این روش کلی حل مساله‌ها به کمك پرگار و خط کش، نه تنها دارای کمبودهایی است که در هر روش کلی وجود دارد، بلکه بحث دربارهٔ قابل حل بودن یا قابل حل نبودن مسالهٔ مفروض را، به کمك پرگار و خط کش، همچنان بدون پاسخ باقی می گذارد. بحث مربوط به‌قابل‌حل بودن یا قابل‌حل نبودن، به صورت تحلیلی انجام می گیرد و به ترتیب زیر بیان می‌شود.

برای این که پاره خط λ را بتوان به کمك پرگار و خطکش ساخت، لازم و کافی است که بتوان طول λ را بـه صورت تابعی از عددهای گویا و پاره خطهای دستهٔ اول، بـه کمك تعداد محدودی عمل‌های جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و جذر گرفتن به دست آورد.

از این جا نتیجه می‌شود: هر پاره‌خطی که به کمك پرگار و خط کش قابل رسم باشد، ریشه‌ای از یك معادلهٔ جبری با درجهٔ 2^n است. ونتل، بحث مربوط به قابل حل بودن این گونه معادله‌ها را، برحسب رادیکال‌های بافرجهٔ دوم داده است. *

روی دو مطلب دیگر تکیه می‌کنیم: عنصرهـای دلخواه و راه‌حل‌های خوش رسم.

عنصرهای دلخواه. اغلب، ضمن حـل مساله‌های هندسی، از نقطه‌های دلخواهی استفاده می‌شود کـه به طور دلخواه در روی صفحه، یا روی خط راست مفروض، یاروی محیط دایرهٔ مفروض ویاداخل یاخارج شکل‌مفروض انتخاب می‌شوند؛ و در ایـن موردها، فرض بر این است که، این نقطه‌های دلخواه، با نقطه‌های مفروض و یا نقطه‌های مفروض و یا نقطه‌هایی کـه قبلاً ساخته شده‌اند، فرق دارند. این فرض‌ها، تشکیل اصل موضوع‌های خاصی را می‌دهند که باید با قراردادهای خاصی، بـرقـرار شوند. ضمن به کار بردن پرگار و خط کش، ازاین اصل موضوع‌ها صرف‌نظر می‌شود: هرنقطهٔ دلخواه را می‌توان به‌سادگی نشانه گذاشت، حتی‌درحالتی‌که باید بانقطه‌های‌مفروض ویاازقبل معین شده، فرق داشته باشند. مثلاً، اگرروی خط راست یا کمانی، نقطه‌هایی به‌ردیف A، B، C، . . .، K وجود داشته‌باشند، می‌توان نقطه‌های دلخواهی را روی پاره‌خطها یا کمان‌هایی که به وسیلهٔ دو نقطه از نقطه‌های A، B، C، . . .، K مشخص شده‌انـد، نشانـه گـذاشت. (برای آشنایی با نمونه‌های‌مشخص عنصرهای دلخواه‌وشرایط تحقق‌آن‌ها، مثلاً به‌یادداشت‌های شمارهٔ ۷۴ و ۹۷ درآخر کتاب مراجعه کنید.)

---

*) درزمان ما، موضوع را به‌طریق دیگری بحث می‌کنند. برای این‌که‌معادله‌ای را بتوان برحسب رادیکال‌های با فرجهٔ ۲ حل کرد، لازم وکافی است که‌معادله ازگروه 2^n باشد.

راه‌حل‌های خوش رسم. ساده‌ترین راه حل یك‌مساله ترکیبی مفروض را، راه‌حل خوش‌رسم آن می‌نامند. روشن است که وقتی معنای سادگی را ندانیم، این تعریف بی‌معنی می‌شود. بنا به نظر لوموان، سادگی راه حل بــه ترتیب زیر روشن می‌شود. لوموان ۴ عمل مقدماتی را درنظرمی گیرد: ۱) قراردادن خط کش درکنار نقطهٔ مفروض، ۲) قراردادن سوزن پرگار درنقطهٔ مفروض، ۳) رسم خط راست و ۴) رسم دایره. او به هر یك ازاین عمل‌ها، عدد ۱ را نسبت می‌دهد و عدد S را، که از مجموع همهٔ عمل‌های مقدماتی ضمن حل مساله بــه دست می‌آید، ضریب سادگی می‌نامد. بــه این ترتیب، رسم خط راست از دونقطهٔ مفروض، دارای ضریب سادگی ۳ است (قراردادن خط کش در کنار دو نقطه و سپس، رسم خط راست). رسم دایره‌ای کــه مرکز O و شعاع AB ازآن معلــوم باشد، دارای ضریــب سادگی ۴ است (قرار دادن دو سر پرگار در نقطه‌های A و B، قــرار دادن سوزن پرگار در نقطهٔ O و، سپس، رسم دایره)؛ در حالتی که O بر A یا B منطبق باشد، ضریب سادگی رسم دایره برابر ۳ و در حالتی که دهانهٔ پرگار از قبل به اندازهٔ شعاع AB باز باشد، این ضریب سادگی برابر ۲ می‌شود.

روشن می کنیم که، اگر راه‌حلی ازیك مساله را داشته باشیم،می‌توانیم با تعداد محدودی آزمایش، راه حل خوش رسم آن را پیدا کنیم. یادآوری می کنیم کــه برای بــه دست آوردن نقطه‌های دستهٔ $n>1$، باید دست کم $2n+1$ عمل مقدماتی انجــام داد. این حکم را، بــه‌کمك استقراء ریاضی، می‌توان ثابت کرد. $n=2$ می گیریم. چون هر نقطهٔ دستهٔ دوم، از برخورد دو خط دستهٔ اول به دست می‌آید، بنابراین برای به دست آوردن نقطه‌های دستهٔ دوم باید دو خط راست از دستهٔ اول را رسم کرد (ضریب سادگی ۶)، یا یك خط راست و یك دایره از دستهٔ اول (ضریب سادگــی ۷ یا ۶) یا دو دایره از دستهٔ اول را (ضریب سادگی ۸، یا ۷، یا ۶، یا ۵). بنابراین، برای $n=2$، تعداد عمل‌های مقدماتی کمتر از ۵ یعنی $2\times2+1$ نیست. هرنقطهٔ دستهٔ $(n+1)$ام از برخورد خط راست یا دایرهٔ دستهٔ nام با خط راست یا دایرهٔ همان دسته یا دستهٔ پایین‌تر به دست می‌آید. اگــر فرض خود را برای عدد n درست بگیریم، برای به دست آوردن خط راست یا دایرهٔ دستهٔ nام

۱) نقطه‌ای از دستهٔ nام لازم است که، بنا بر فرض، به تعدادی عمل مقدماتی که کمتر از $۲n+۱$ نیست نیاز داریم، و ۲) خطی از دستهٔ nام لازم است که دست کم به ۲ عمل مقدماتی نیاز دارد، به نحوی که برای به‌دست‌آوردن نقطه‌ای از دستهٔ nام به $۲n+۱+۲$، $۲(n+۱)+۱$ عمل نیاز داریم.

اکنون فرض می‌کنیم مساله‌ای را حل کرده‌ایم و ضریب سادگی آن برابر S است. بزرگترین عدد ν را طوری پیدا می‌کنیم که در نابرابری $۲\nu+۱\leqslant S$ صدق کند. در این صورت $۲(\nu+۱)+۱>S$. نقطهٔ دستهٔ $(\nu+۱)$ام، به $۲(\nu+۱)+۱>S$ عمل مقدماتی نیاز دارد. ازاین‌جا نتیجه می‌شود که در حل خوش رسم مساله، هیچ نقطه‌ای از دستهٔ $(\nu+۱)$ام وارد نمی‌شود و، بنابراین، برای به دست‌آوردن راه حل خوش رسم، در جست‌وجوی نقطه‌های دستهٔ νام باشیم. تعداد این نقطه‌ها، محدود است.*

پروفسور س. ا. شاتونووسکی

---

*) تا کنون روشی برای به دست آوردن راه حل خوش رسم پیدا نشده است.

یادداشت: گاهی ممکن است، ضریب سادگی، پایین‌تر از نقطه‌های دلخواه وارد شده باشد. در این حالت، باید راه حل خوش رسم را بدون واردکردن نقطه‌های دلخواه به دست آورد و، بعد، معلوم کرد کدام یك از نقطه‌های مفروض یا ساخته شده را می‌توان با نقطه‌های دلخواه‌عوض کرد. مثلاً، ضریب سادگی پیدا کردن وسط یك پاره‌خط، بدون واردکردن نقطه‌های دلخواه، برابر است با ۱۱. ولی اگر به‌جای دو دایرهٔ $A(AB)$ و $B(AB)$، دو دایرهٔ با شعاع‌های برابر ولی دلخواه انتخاب کنیم، ضریب سادگی برابر با ۱۰ می‌شود.

یادداشت‌های تاریخی

۱. منظور از نظریهٔ ساختمان‌های هندسی، معمولاً، آشنا شدن با روش‌هایی است که، به کمك آن‌ها، بتوان مساله‌های ساختمانی هندسه را حل کرد.

تعداد زیادی از این گونه روش‌ها وجود دارد و ما به طور عمده در فصل اول این کتاب، دربارهٔ آن‌ها صحبت کرده‌ایم.

ولی به جز روش‌های حل، موضوع‌های دیگری هم وجود دارد که به نظریهٔ ساختمان‌های هندسی مربوط می‌شوند و بخش بزرگی از این کتاب به‌آن اختصاص دارد.

۲. یکی از این موضوع‌ها، عبارت است از حوزهٔ کاربرد هر یك از ابزارهایی که برای حل مورد استفاده قرار می‌گیرند، یعنی بحث در این باره که، چه مساله‌هایی را می‌توان به کمك هر یك از این ابزارها به طور کامل و با دقت حل کرد و کدام یك از ابزارها، تنها وسیله‌ای کمکی برای ابزارهای دیگرند؟

در سال ۱۷۹۷، ماسکه‌رونی در تالیف مشهور خود[1] ثابت کرد: همهٔ ساختمان‌های هندسی را که به کمك پرگار و خط‌کش قابل اجرا باشند (یعنی همهٔ ساختمان‌های درجه دوم)، می‌توان تنها به کمك پرگار هم انجام

1. *Mascheroni, La Geometria del Compasso.*

داد. این گـونـه ساختمان‌ها، در بسیاری از موردهای عملی، و مثلاً برای تقسیم محیط دایره به بخش‌های برابر، مفیدند، زیرا پرگار وسیله‌ای دقیق‌تر از خط‌کش است.

بلافاصله بعد از آن، هندسه‌دان‌های فرانسوی، بـه بررسی مساله‌هایی پرداختند که تنها به کمك رسم خطهای راست، قابل حل‌اند.

لامبرت[1] توانست اهمیت این گونه ساختمان‌ها را در مساله‌های مربوط به پرسپکتیو و نقشه‌برداری نشان دهد. بریانشون، درسال ۱۸۱۸، کتابی دربارهٔ این گونه ساختمان‌ها منتشر کرد.[2]

کتاب یاکوب شتینر، جای خاصی در این زمینه دارد.[3] شتینر، در این کتاب، از ساختمان‌هایی صحبت می‌کند که تنها به کمك رسم خطهای راست قابل حل هستند، به شرطی کـه یك شکل، و مثلاً متوازی‌الاضلاع، مربع یا دایره‌ای در صفحهٔ شکل مفروض باشد. او بـه خصوص، قضیهٔ زیر را ثابت کرد که به نام خود او مشهور است:

اگریك دایرهٔ ثابت (همراه با مرکزآن) در صفحهٔ شکل رسم شده باشد، آن وقت، هر مسالهٔ ساختمانی درجـه دوم را می‌توان تنها با رسم خطهای راست حل کرد.

با وجود این، باید یادآوری کرد که بسیاری از ساختمان‌ها، که مورد بحث شتینر در کتاب خود قرار گرفته است، در کتاب لامبرت هم پیدا می‌شود ونتیجه‌گیری اصلی او، که در بالا آوردیم، در کتاب پونسله[4] هم پیدامی‌شود. گوس، در تالیف مشهور خود[5] ثابت کرد که هفده ضلعی منتظم را می‌توان به کمك پرگاروخط‌کش رسم کرد. این ساختمان را، به‌صورت زیبائی، شتودت[6]

---

1. *Lambert, Freie Perspective, 1774.*
2. *Brianchon, Les applications de la théorie des transversales.*
3. *Steiner, Die geometrische Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und einesfesten Kreises (1833).*
4. *Poncelet, Traité des propriétés projectives, Paris, 1822.*
5. *Gauss, Disquisitiones arithmeticae.*
6. *v. Staudt, Crelle Journal, 1842.*

و، سپس، شه‌روتر[1] هم انجام دادند.

کورتوم[2] و سمیت[3] در دو اثر خود، که جایزهٔ شتینر را از فرهنگستان علوم برلن دریافت کردند (۱۸۶۶)، ثابت کردند کـه هر مسالهٔ درجهٔ سوم هندسی را می‌توان بـه کمك پرگار و خط‌کش حل کرد، بـه شرطی که یك مقطع مخروطی (به‌جز دایره) درصفحهٔ شکل داده شده باشد. وینر دراثرخود، که در سال ۱۸۹۰ به وسیلهٔ فرهنگستان منتشر شد،[4] ثابت کرد که استفاده از انعکاس در حل مساله‌ها تنها به کمك یك پرگار، بر روش‌های دیگر ترجیح دارد. وینر، در اثر دیگر خود[5] (۱۸۹۰)، ثابت کـرد که هر مسالهٔ هندسی درجـه دوم را می‌توان به کمك خط‌کشی با دو لبهٔ موازی، یا به کمك یك زاویهٔ قائمهٔ متحرك و یا به کمك یك زاویـهٔ حادهٔ (دلخواه) متحرك حل کرد؛ بنابراین، هر یك از ابزارهای رسم (پرگار، خط‌کش، زاویهٔ قائمه یا حاده)، به تنهائی برای حل همهٔ مساله‌های هندسی درجـهٔ دوم کافی است؛ در همین نوشته ثابت شد که زاویهٔ قائمه، نیرومندتریـن ابزار رسم است؛ در ضمن، به کمك دو زاویهٔ قائمهٔ می‌توان همهٔ مساله‌های درجهٔ سوم و درجهٔ چهارم را هم حل کرد.

هیلبرت در کتاب خود[6]، اساس ساختمان هندسی را بر رسم خطهای راست و انتقال پاره‌خطها قرار داده است. نظریهٔ این گونه ساختمان‌ها را، فلدبلوم داد.[7]

همچنین باید ازکارهای سیمون[8] و والن‌برگ[9] هم یادکرد.

---

1. *Schröter*. 2. *Kortum*. 3. *Smith*.

4. *Wiener, Zut Theorie der Mascheronischen Konstructionen.*

5. *Wiener, Über die Zur Ausführung geometrischer Konstruktionen notwendigen Hilfs mittel.*

6. *Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 1903.*

7. *Feldblum, Über elementar–geometrische Konstruktionen Inougural–Dissertation, Göttingen 1899.*

8. *H. Simon, Geometrische Konstruktionen ohne Zirkel, 1891.*

9. *G. Wallenberg, Konstruktionen mit Lineal und Eichmass so Wie mit dem lineal allein, 1905.*

۳. این تلاش‌ها، بررسی‌های مربوط بـه استفاده از ابزارهای عادی را برای حل مساله‌های ساختمانی هندسی، به حدکمال خود نزدیك کرد.

تقسیم‌بندی مساله‌های هندسه هم، به‌نظریهٔ ساختمان‌های هندسی مربوط می‌شود. مساله‌های‌هندسی‌را می‌توان به‌مساله‌های مجسم[1] ومساله‌های متریك، یا به‌مساله‌های درجه دوم، درجه سوم، درجه چهارم و درجه‌های بالاتر تقسیم کرد. ما بعداً، به تفصیل در این‌باره صحبت خواهیم کرد.

۴. اثبات بعضی ناممکن‌ها هم، به نظریهٔ ساختمان‌های هندسی مربوط می‌شود. مثلاً ثابت می‌کنیم که، بـه کمك پرگار و خط‌کش، نمی‌توان یك زاویه را به سه قسمت برابر تقسیم کرد، یا مکعبی را پیدا کرد، که حجم آن دو برابر حجم مکعب مفروض باشد ویا مربعی هم‌ارز بادایرهٔ مفروض‌ساخت [حکم اخیر را لیندمان (*Lindemann*) برای نخستین بار در سال ۱۸۸۲ ثابت کرد].

۵. مسالهٔ مربوط به دقت رسم، به‌کمك این یا آن ابزار کار، باز هم به نظریهٔ ساختمان‌های هندسی مربوط می‌شود. در واقع، هر شکلی که رسم می‌شود، همراه با خطاهایی است. وقتـی کـه با یك نقطه، در صفحهٔ رسم، سروکار داریم، درجای واقعی خود، به مفهوم یك نقطهٔ ایده‌آل، قرار ندارد؛ نقطهٔ رسم شده، در حوالی نقطهٔ ایده‌آل قـرار می‌گیرد و می‌توان گفت که جای واقعی آن، در درون حوزه‌ای قرار دارد که می‌توان آن را بیضی شکل درنظر گرفت. بنابراین، وقتی که شکلی را رسم می‌کنیم، باید میزان تقریب آن را بدانیم و یا، دست‌کم، راهی برای محاسبهٔ درجهٔ دقت آن، در اختیار داشته باشیم و، بنابراین، این مساله در برابر ما قرارمی‌گیردکه، شکل مورد‌نظر را چگونه رسم‌کنیم تا میزان خطاهای حاصل، حداقل مقدارممکن باشد. بررسی این‌مساله، اهمیت زیادی برای‌کارهای عملی دارد. برخی ازجنبه‌های این بررسی را می‌توانیم درکتاب وینر پیدا کنیم.[1]

بعدها، لوموان (*Lemoine*)، امکانی محاسبه‌ای فراهم‌آورد تا دربارهٔ سادگی و دشواری راه‌حل‌ها، معیاری وجود داشته باشد؛ معیار لوموان،درجهٔ سادگی راه‌حل را معین می‌کند و به خصوص، ساختمان‌های خوش رسمی را

---

1. *Wiener, Darstellende Geometrie.*

مورد مطالعه قرار می‌دهد که می‌توان آن‌ها را ساده‌ترین راه‌حل‌ها دانست.

لوموان، تنها از پرگار و خط‌کش یك لبه استفاده می‌کند؛ ولی اگر خط‌کش دو لبه و زاویهٔ قائمه را هم در نظر بگیریم (همان طور که در عمل هم، چنین است)، آن وقت می‌توانیم به‌راه‌حل‌های خوش رسم تازه‌ای برسیم که ساده‌تر از روش راه‌حل‌های کلاسیك باشد.

۶. تا کنون، تنها دو کتاب اختصاصی، دربارهٔ نظریهٔ ساختمان‌های هندسی نوشته شده است. این دو کتاب، یکی متعلق به‌فلیکس کلاین[1] و دیگری متعلق به انریکس[2] است و ما در بحث‌های کتاب خود، بارها از آن‌ها استفاده کرده‌ایم.۲

---

1. *F. Klein, Vorträge Über ausgewählte Fragen der Elementar-Geometrie, Leipzig, 1895.*

2. *F. Enriques, Questioni Riguardanti La Geometria Elementare, Bologna, 1900.*

فصل اول

روش‌های حل مسأله‌های ساختمانی هندسه

۱. هرساختمان‌هندسی، یك مسألهٔ ساختمانی هندسه را حل‌می‌کند.

درهر مسألهٔ ساختمانی هندسه، باید شکلی‌را رسم کرد[۳] که با شرطهای معینی سازگار باشد.

اگرشرطهای مفروض، برای‌تعیین شکل موردنظر، لازم وکافی باشند، مساله را معین گویند. در چنین حالتی ممکن است برای مساله، یك یا دو یا چند جواب به‌دست‌آیدکه، در این صورت، مساله را به‌ترتیب، یك ارزشی، دو ارزشی یا چندارزشی گویند.

اگر شرطها کمتر از آن چه برای تعیین‌شکل لازم است، داده شده باشد، آن‌وقت، مجموعه‌ای نامتناهی از شکل‌ها وجود داردکه همهٔ عضوهای آن، با شرطهای مساله سازگارند: مساله نامعین است.

اگر شرطها را بیشتر ازآن‌چه برای حل مساله‌کافی است، داده‌باشند، مساله در حالت‌کلی، غیرقابل حل می‌شود و معمولاً جواب ندارد[۴].

۲. برای حل مساله‌های ساختمانی هندسه، معمولاً به‌ترتیب زیر عمل می‌کنند.

فرض می‌کنند، شکل موردنظررسم شده است، سپس‌شکل را تا آن‌جا مورد مطالعه قرار می‌دهند تا راه حل مساله روشن شود.

از این راه روش رسم شکل مورد نظر به دست می‌آید. ولی بعد از رسم، هنوز باید ثابت‌کردکه شکل حاصل، با همهٔ شرطهای مساله سازگار،

یعنی ساختمان درست است. سرانجام، باید مساله را در مجموع خود مورد بحث قرار داد تا معلوم شود که مساله چند جواب دارد، چه رابطه‌ای بین تعداد جواب‌ها و داده‌های مساله وجود دارد و غیره.

به‌این‌ترتیب، درحل هرمسالهٔ ساختمانی، باید چهارمرحله تشخیص‌داد:

۱) تجزیه و تحلیل صورت‌مساله،

۲) انجام رسم،

۳) اثبات درستی راه‌حل،

۴) بحث.

۳. دراین فصل، تنها ازپرگار وخط‌کش، به‌عنوان ابزار رسم،استفاده می‌کنیم[5] و درفصل‌های بعد به‌وسیله‌های دیگری که در رسم مورد استفاده قرار می‌گیرند، خواهیم پرداخت.

§۱. روش تجزیه و تحلیل جبری

۱. اگر a، b و c پاره‌خط‌های مفروضی باشند، می‌توان به‌کمك‌پرگار و خط‌کش، یعنی تنها با رسم خط‌های راست و دایره‌ها، پاره‌خط‌های زیررا رسم کرد:

$$a+b,\ a-b,\ \frac{ab}{c},\ \sqrt{ab},\ \sqrt{a^2+b^2},\ \sqrt{a^2-b^2}$$

با تکرار این عمل‌های اصلی می‌توان عبارت‌های بغرنج‌تری از نوع عبارت

$$x=\sqrt{a^2+b^2-cd}$$

را هم رسم‌کرد، زیرا اگر فرض‌کنیم

$$cd=y^2 \quad \text{و} \quad \sqrt{b^2-y^2}=z$$

آن‌وقت خواهیم داشت:

$$x=\sqrt{a^2+z^2}$$

و پاره‌خطهای y، z و x، براساس همان عمل‌های اصلی ساخته می‌شوند.

اگر بخواهیم پاره‌خط

$$x=\frac{a^3b^2}{c^2d^2}$$

را رسم کنیم، فرض می‌کنیم:

$$\frac{ab}{c}=u_1,\ \frac{au_1}{c}=u_2,\ \frac{au_2}{d}=u_3,$$

آن‌وقت، خواهیم داشت:

$$x=\frac{u_3b}{d}$$

و پاره‌خطهای u_1، u_2، u_3 و x را می‌توان به‌سادگی رسم کرد.

پاره‌خطی را هم که به‌صورت عبارت

$$x=\frac{ab+\sqrt{c^2d^2-\sqrt{c^4-f^3g}}}{\sqrt{m^2+n^2+\frac{pq}{r}}}$$

باشد، می‌توان رسم کرد، به‌شرطی که a، b، c،... پاره‌خطهای مفروضی باشند.

به‌طور کلی، هر عبارتی را که شامل تعداد محدودی عمل‌های اصلی (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) و ریشهٔ دوم باشد، می‌توان رسم کرد (مقدمه را ببینید).

۲. بر همین اساس مـی‌توان اغلب مساله‌های ساختمانی را بـا روش تجزیه و تحلیل جبری حل کرد.

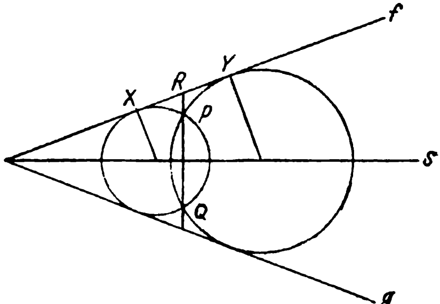
کوشش می‌کنیم نتیجهٔ مجهول (و مثلاً پـاره‌خط مجهول) را بر حسب داده‌های مساله بیان کنیم (درحالت‌های مناسب، می‌توان از هندسهٔ‌تحلیلی استفاده‌کرد) و، سپس، عبارت حاصل را رسم می‌کنیم.

۳. استفادهٔ از این روش را، ضمن چند مثال روشن می‌کنیم.

مثال ۱. دوخط راست f و g و نقطهٔ p داده شده است. مـی‌خواهیم

دایره‌هایی را رسم کنیم که، هر کدام از آن‌ها، از نقطهٔ p بگذرند و بر دوخط راست مفروض مماس باشند.

فرض می‌کنیم، مساله حل شده است (شکل ۱)؛ در این‌صورت



شکل ۱

$$\overline{RX}^{2} = \overline{RP} \times \overline{RQ}$$

که در آن، Q قرینهٔ P نسبت به نیمساز زاویه‌است[۶]. از آنجا نتیجه می‌شود:

$$RX = \sqrt{RP \cdot RQ}$$

مثال ۲. مثلث ABC مفروض است. می‌خواهیم سه دایره رسم کنیم که، هرکدام ازآن‌ها، بردودایرهٔ دیگر و دوضلع مثلث مماس باشد (مسألهٔ مالفاتی)*.

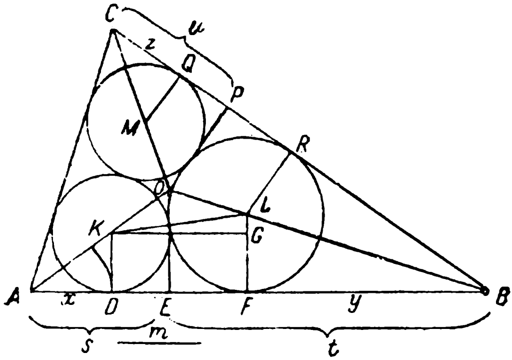
فرض می‌کنیم مساله حل شده باشد (شکل ۲). نقطهٔ O را مرکز دایرهٔ محاطی مثلث (به‌شعاع r) می گیریم. شعاع‌های دو دایرهٔ K و L را r_1 و r_2 فرض می کنیم. از نقطه‌های K ، O و L، عمودهایی بر ضلع AB رسم می‌کنیم و پای عمودها را D، E و F می‌نامیم. فرض می کنیم: $AE = s$، $BE = t$، $AD = x$، $BF = y$.

اگر KG را موازی AB رسم کنیم، داریم:

$$LG = r_2 - r_1 \text{ و } KG = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_2 - r_1)^2} = 2\sqrt{r_1 r_2}$$

---

*) نخستین کسی که به این مسالهٔ مشهور پرداخت، مالفاتی (*Malfatti*) بود (۱۸۰۳)، شتینر درسال ۱۸۲۶ ، راه‌حل‌هندسی آن‌را، بدون اثبات، داد و بعد، درسال ۱۸۷۴ ، شره‌تر، درستی این‌راه حل را ثابت کرد. پترسن (*Petersen*) هم‌اثبات دیگری برای راه‌حل شتینر پیداکـرد (درکتاب «نظریهٔ مساله‌های ساختمانی هندسه و روش‌های آن»).



شکل ۲

از تشابه[۷] مثلث‌های ADK و AEO نتیجه می‌شود:

$$r_۱ = \frac{xr}{s}$$

و به‌همین ترتیب $r_۲ = \frac{yr}{t}$ کـه از تشابه مثلث‌های BFL و BEO به دست می‌آید. سپس

$$AB = AD + DF + FB$$

بنابراین

$$x + y + ۲\sqrt{r_۱ r_۲} = s + t$$

و یا (با قرار دادن مقدارهایی که برای $r_۱$ و $r_۲$ پیدا کرده‌ایم)

$$x + y + \frac{۲r}{\sqrt{st}}\sqrt{xy} = s + t \qquad (۱)$$

اگر از نقطه‌های L، M و O، عمودهایی بر ضلع BC فرود آوریم و فرض کنیم $PC = u$ و $QC = z$[۸]، به‌دست می‌آید:

$$y + z + \frac{۲r}{\sqrt{tu}}\sqrt{yz} = t + u \qquad (۲)$$

به‌همین‌ترتیب، برای ضلع سوم به‌دست می‌آید:

$$z+x+\frac{۲s}{\sqrt{us}}\sqrt{zx}=u+s \qquad (۳)$$

به‌این ترتیب، برای پیدا کردن سه مجهول x، y و z، به‌سه معادله می‌رسیم:
مالفاتی جواب این دستگاه را به‌صورت زیر به‌دست می‌آورد:

$$۲x=s+t+u-r+\sqrt{r^۲+s^۲}-\sqrt{r^۲+t^۲}-\sqrt{r^۲+u^۲}$$

$$۲y=s+t+u-r-\sqrt{r^۲+s^۲}+\sqrt{r^۲+t^۲}-\sqrt{r^۲+u^۲}$$

$$۲z=s+t+u-r-\sqrt{r^۲+s^۲}-\sqrt{r^۲+t^۲}+\sqrt{r^۲+u^۲}$$

به سادگی می‌توان تحقیق کرد که، این مقدارها، در معادله‌های (۱)، (۲) و (۳) صدق می‌کنند. خود مالفاتی یادآوری می‌کند که روش حل او، برای به‌دست آوردن جواب، بی‌اندازه پیچیده است.

ولی رسم مقدارهای x، y و z بی‌اندازه ساده است، زیرا

$$\sqrt{r^۲+s^۲}=OA، \quad \sqrt{r^۲+t^۲}=OB، \quad \sqrt{r^۲+u^۲}=OC$$

که به کمک آن‌ها، این پاره خط‌ها و، همچنین، پاره‌خط‌های s، t، u و r را می‌توان به‌سادگی رسم کرد.

اکنون اگر عبارت

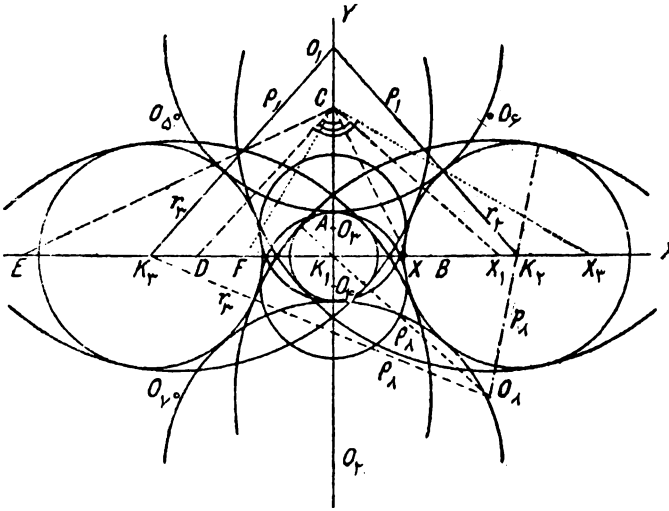
$$\frac{۱}{۲}(OA+OB+OC-s-t-u+r)=m$$

را رسم کنیم، آن‌وقت خواهیم داشت (شکل ۲):

$$x=OA-m، \qquad y=OB-m، \qquad z=OC-m$$

مثال ۳. سه دایرهٔ $K_۱$، $K_۲$ و $K_۳$، که مرکزهای آن‌ها روی یک خط راست قرار دارند، داده شده است؛ در ضمن شعاع هر دو دایرهٔ $K_۲$ و $K_۳$ برابر است با $r_۲$. فاصلهٔ مرکز هریک از دو دایرهٔ اخیر تا مرکز دایرهٔ $K_۱(r_۱)$ برابر است با a. می‌خواهیم همهٔ دایره‌هایی را پیدا کنیم که بر این سه دایره مماس باشند (شکل ۳).

برای حل این مساله، به‌کمک محاسبه، از دستگاه محورهای مختصات



شکل ۳

قائم استفاده می‌کنیم. معادلهٔ این دایره‌ها، چنین است:

$$K_1: \qquad x^2+y^2=r_1^2$$

$$K_2: \qquad (x-a)^2+y^2=r_2^2$$

$$K_3: \qquad (x+a)^2+y^2=r_2^2$$

معادلهٔ هر یك از دایره‌های مجهول هم، به این صورت درمی‌آید:

$$(x-p_i)^2+(y-q_i)^2=\rho_i^2$$

برای دایرهٔ O_1 (شکل ۳)، می‌توان سه معادله، برای پیدا کردن مجهول‌های p_i، q_i و ρ_i تشکیل داد. از شرط‌های

$$\overline{O_1K_1}=\rho_1+r_1$$

$$\overline{O_1K_2}=\rho_1+r_2$$

$$\overline{O_1K_3}=\rho_1+r_2$$

برابری‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$p_1^2+q_1^2=(\rho_1+r_1)^2$$

$$(p_1-a)^2+q_1^2=(\rho_1+r_2)^2$$

$$(p_1+a)^2+q_1^2=(\rho_1+r_2)^2$$

ازدومعادلهٔ آخر نتیجه می‌شود: $p_1=0$ و از آن‌جا، بلافاصله به‌دست می‌آید:

$$\rho_1=\frac{a^2-(r_2^2-r_1^2)}{2(r_2-r_1)}=p_2 \qquad (1)$$

زیرا، شعاع دایرهٔ O_2، با شعاع دایرهٔ O_1 برابر است (شکل ۳).

دایرهٔ O_3 چنان است که دو دایرهٔ K_2 و K_3 در بیرون آن، و دایرهٔ K_1 در درون آن قرار دارند. بنابراین، باید داشته باشیم:

$$\overline{O_3K_1}: \quad p_3^2+q_3^2=(\rho_3-r_1)^2$$

$$\overline{O_3K_2}: \quad (p_3-a)^2+q_3^2=(\rho_3+r_2)^2$$

$$\overline{O_3K_3}: \quad (p_3+a)^2+q_3^2=(\rho_3+r_2)^2$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$\rho_3=\frac{a^2-(r_2^2-r_1^2)}{2(r_2+r_1)}=\rho_4 \qquad (2)$$

برای دایرهٔ O_5، این برابری‌ها برقرارند:

$$p_5^2+q_5^2=(\rho_5-r_1)^2$$

$$(p_5+a)^2+q_5^2=(\rho_5-r_2)^2$$

$$(p_5-a)^2+q_5^2=(\rho_5+r_2)^2$$

که از آن‌ها به‌دست می‌آید:

$$\rho_5=\frac{a^2-(r_2^2-r_1^2)}{2r_1}=\rho_6=\rho_7=\rho_8$$

رسم‌را می‌توان با طرح زیر به‌انجام‌رسانید. به‌ترتیب، رسم می‌کنیم (شکل ۳):

$$AB = r_2, \qquad BC = a$$

در این صورت

$$CK_1 = \sqrt{a^2 - (r_2^2 - r_1^2)}$$

سپس، اگر رسم کنیم:

$$K_1D = 2(r_2 - r_1) \text{ و } CX_1 \perp CD$$

آن‌وقت

$$K_1X_1 = \rho_1 = \rho_2$$

به‌همین ترتیب، رسم می‌کنیم:

$$K_1X_2 = \rho_3 = \rho_4, \qquad K_1X_3 = \rho_5 = \rho_6 = \rho_7 = \rho_8$$

۴§. روش مکان‌های هندسی

۱. ساده‌ترین روش، برای حل مساله‌های ساختمانی هندسه، روش مکان‌های هندسی است.

برای استفاده از این روش، کوشش می‌کنند تمامی مساله را، به پیدا کردن یك نقطهٔ X منجر کنند، کاری که اغلب دشوار نیست.

نقطهٔ X، به‌یاری دوشرطی‌که ناشی ازخواست‌های مساله‌است، پیدا می‌شود. اگــر تنها یکی از شرط‌ها را در نظر بگیریم، به‌جای یك نقطهٔ X ، مجموعه‌ای نامتناهی از این نقطه‌ها به‌دست می‌آیدکه، در مجموع، خطی‌را تشکیل می‌دهندکه یك مکان هندسی است. اگرتنها شرط دوم را درنظربگیریم، بازهم یك‌مکان هندسی به‌دست‌می‌آید. هرنقطهٔ برخورد این دومکان‌هندسی، با خواست‌های مساله سازگار خواهد بود.

۲. لازم است برخی ازمکان‌های هندسی را مورد بررسی قرار دهیم. ازساده‌ترین این مکان‌های هندسی‌آغاز می‌کنیم که، درعین حال،سودمندترین آن‌ها هستند.

a) مکان هندسی نقطه‌هایی که از یك نقطهٔ مفروض بــه‌فاصلهٔ مفروض

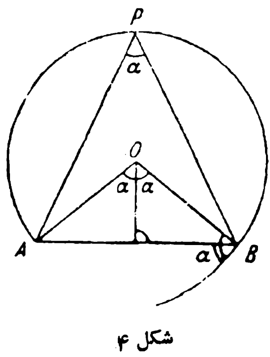
قرار گرفته‌اند، دایره‌ای است که مرکـز آن نقطهٔ مفروض و شعاع آن فاصلهٔ مفروض است.

b) مکان هندسی نقطه‌هایی که به فاصلهٔ مفروض از خط راست مفروض قرار دارند، عبارت است از دو خط راست موازی با خط راست مفروض و به‌فاصلهٔ مفروض از آن.

c) مکان‌هندسی نقطه‌هایی که ازدو نقطهٔ مفروض A و B به‌یك‌فاصله‌اند، خط راستی است عمود بر پاره‌خط AB در وسط آن (عمود منصف پاره‌خط AB).

d) مکان هندسی نقطه‌هایی که ازدوخط مفروض به‌یك فاصله‌اند، عبارت است از دوخط راست عمود برهم، که زاویه‌های بین دوخط راست مفروض را نصف می کنند (نیمسازها)[۹].

e) مکان هندسی نقطه‌هایی که، از آن‌ها، پاره‌خط AB تحت زاویهٔ α دیده می‌شود، کمانی از دایره است (کمان در خور α) که نقطه‌های A و B دو انتهای آن هستند (روش رسم، در شکل ۴، به‌روشنی دیده می‌شود).[۱۰]

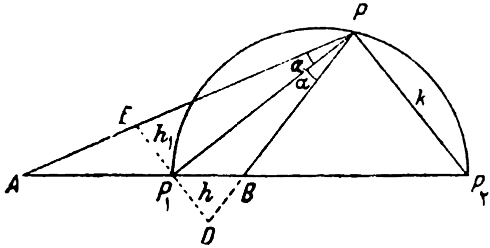


شکل ۴

f) مکان هندسی نقطه‌هایی که فاصلهٔ آن‌ها از دو نقطهٔ مفروض، به‌نسبت مفروض $m:n$ باشد، عبارت است ازیك دایره (شکل ۵)[۱۱]. درضمن

$$\frac{AP_1}{BP_1}=\frac{AP}{BP}=\frac{m}{n}$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:



شکل ۵

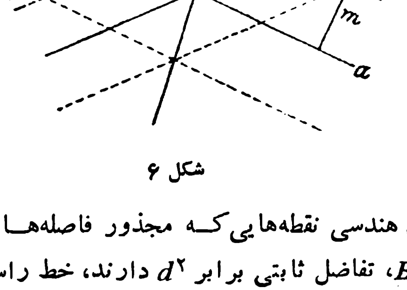
$$\widehat{APP_1} = \widehat{P_1PB}$$

این تناسب هم برقرار است:

$$AP_1 : P_1B = AP_2 : BP_2$$

در این صورت گویند، این چهار نقطه، خط راست را به‌نسبت توافقی تقسیم کرده‌اند (یا به‌طور خلاصه گویند: با چهار نقطهٔ توافقی سر وکار داریم).

g) مکان هندسی نقطه‌هایی‌که فاصلهٔ آن‌ها از دو خط راست مفروض، به نسبت مفروض $m:n$ باشند، عبارت است از دو خط راست x و y که از نقطهٔ برخورد خط‌های راست مفروض می گذرند (شکل ۶).

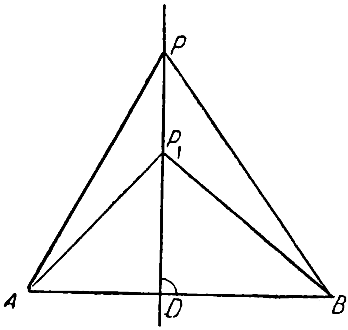


شکل ۶

h) مکان هندسی نقطه‌هایی‌کـه مجذور فاصله‌هـای آن‌ها از دو نقطهٔ مفروض A و B، تفاضل ثابتی برابر d^2 دارند، خط راستی است عمود بـر پاره خط AB.

اثبات. فرض کنیم نقطهٔ P_1 دارای چنین خاصیتی باشد (شکل ۷)، به نحوی که

$$\overline{P_1B}^2 - \overline{P_1A}^2 = d^2$$



شکل ۷

اگر از نقطهٔ P_1 عمودی بر AB رسم و روی آن، نقطهٔ دلخواه P را انتخاب کنیم، داریم:

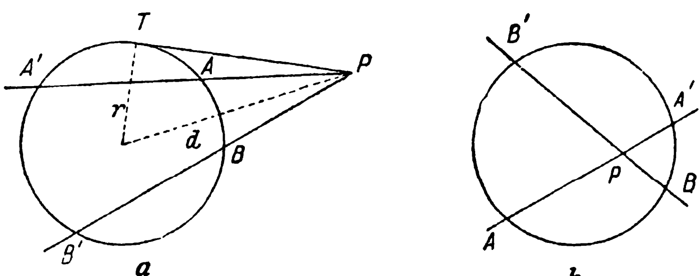
$$\overline{PB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DP}^2 \quad \text{و} \quad \overline{PA}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DP}^2$$

بنابراین

$$\overline{PB}^2 - \overline{PA}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{P_1B}^2 - \overline{P_1A}^2 = d^2$$

از h) می‌توان نتیجه‌ای به دست آورد که بعدها، برای ما اهمیت پیدا می‌کند و در این جا، به صورتی کوتاه، از آن یاد می‌کنیم.

α) می‌دانیم، اگر از نقطهٔ P، خط‌های راستی رسم کنیم تا دایرهٔ مفروض را قطع کنند (شکل ۸ ــ a و b)، داریم:



شکل ۸

$$PA \cdot PA' = PB \cdot PB' = \dots = \text{const}$$

این حاصل ضرب ثابت را، قوت نقطهٔ P نسبت به دایرهٔ مفروض گویند؛ این قوت برابر است با $d^۲ - r^۲$، که در آن، d فاصلهٔ نقطهٔ P تا مرکز دایره (فاصلهٔ مرکزی نقطهٔ P) و r شعاع دایره است.

وقتی که نقطهٔ P در بیرون دایره باشد، می‌توان قوت آن را نسبت به دایره برابر $PT^۲$ دانست.

β) اگر دو دایره به مرکزهای $O_۱$ و $O_۲$ مفروض باشد. نقطهٔ P نسبت به هر کدام از دو دایره، دارای قوت معینی است. وقتی که نقطهٔ P نسبت به دو دایره (به شعاع‌های $r_۱$ و $r_۲$)، قوتی برابر داشته باشد. آن‌گاه

$$\overline{PO_۱^۲} - r_۱^۲ = \overline{PO_۲^۲} - r_۲^۲$$

به نحوی که

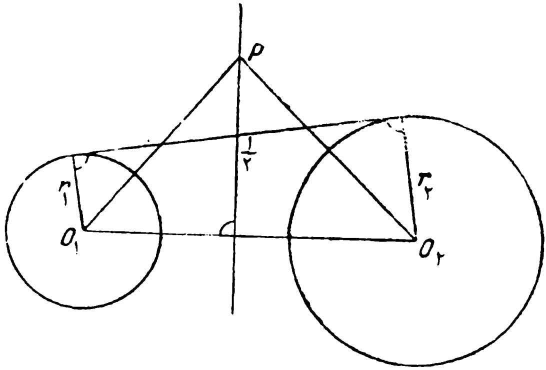
$$\overline{PO_۱^۲} - \overline{PO_۲^۲} = r_۱^۲ - r_۲^۲ = \text{const}$$

بنابراین، مکان هندسی نقطه‌هایی که، نسبت به دو دایره، به یك قوت باشند [بنابر(h)]، خط راستی است عمود برخط‌المرکزین دو دایره. این خط راست را، محور اصلی دو دایره گویند.

اگر دو دایره متقاطع باشند، محور اصلی از نقطه‌های برخورد آن‌ها می‌گذرد، زیرا هر نقطهٔ برخورد، نسبت به هر دو دایره قوتی برابر صفر دارد. وقتی که دایره‌ها یکدیگر را قطع نکرده باشند، محور اصلی را می‌توان با رسم عمودی از وسط مماس مشترك آن‌ها، بر خط‌المرکزین به دست آورد (شکل ۹). به طریق دیگری هم می‌توان محور اصلی را پیدا کرد. ابتدا به این قضیه توجه کنیم: اگر سه دایره در صفحه‌ای داده شده باشند، هردو دایره نسبت به هم یك محور اصلی دارند، به نحوی که، سه محور اصلی، از یك نقطه می‌گذرند (مرکز اصلی سه دایره). اثبات این حکم ساده است: نقطهٔ برخورد دو محور اصلی، نسبت به سه دایره، دارای یك قوت است و، درنتیجه، محور اصلی سوم هم از این نقطه می‌گذرد.

۳. روش مکان‌های هندسی را، روی دو مثال روشن می‌کنیم.

α) دو دایرهٔ $O_۱$ و $O_۲$ به شعاع‌های $r_۱$ و $r_۲$ مفروض‌اند. می‌خواهیم



شکل ۹

دایرهٔ K را طوری رسم کنیم که بر دو دایرهٔ مفروض مماس، و شعاعی برابر r داشته باشد.

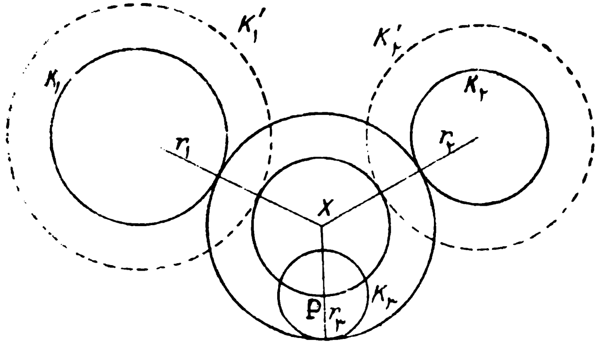
اگر تنها یك شرط را در نظر بگیریم و فرض کنیم دایرهٔ K باید بر دایرهٔ O_1 مماس باشد، آن وقت، مجموعه‌ای نامتناهی از دایره‌های مورد-نظر به دست می‌آید. مکان هندسی مرکزهای این دایره‌ها، عبارت است از محیط دو دایرهٔ هم مرکز با O_1 و با شعاع‌های r_1+r و $r-r_1$. به همین ترتیب، برای مرکز مجهول X، مکان هندسی دیگری هم به دست می‌آید که عبارت است از محیط دو دایرهٔ به مرکز O_2 و شعاع‌های r_2+r و $r-r_2$.

نقطهٔ X باید در نقطهٔ برخورد این دومکان هندسی باشد. مسأله، حداکثر هشت جواب دارد که با شرط‌های آن سازگارند.

β) سه دایرهٔ K_1، K_2 و K_3 مفروض‌اند. می‌خواهیم همهٔ دایره‌هایی را پیدا کنیم که بر سه دایرهٔ مفروض مماس باشند (مسألهٔ آپولونیوس در بارهٔ مماس‌ها).

اگر (شکل ۱۰) از مرکز یکی از سه دایرهٔ مفروض، و مثلاً ازمرکز دایرهٔ K_3، دایره‌ای هم مرکز با دایرهٔ مجهول X بگذرانیم، مسألهٔ مفروض به مسألهٔ زیر تبدیل می‌شود:

دو دایرهٔ K'_1 و K'_2[12] و نقطهٔ P داده شده است. می‌خواهیم دایره‌ای رسم کنیم که بر دو دایرهٔ مفروض مماس باشد و از نقطهٔ P بگذرد.



شکل ۱۰

مکان هندسی مرکزهای همهٔ دایره‌هایی که بر دایرهٔ K'_1 مماس‌اند و از نقطهٔ P می‌گذرند، عبارت است از یك بیضی یا یك هذلولی، بسته به این‌که نقطهٔ P درون دایرهٔ K'_1 باشد یا بیرون آن[۱۳]. مرکز دایرهٔ K'_1 و نقطهٔ P کانون‌های این مقطع‌های مخروطی‌اند؛ مجانب‌های هذلولی عمود بر مماس‌هایی هستند که از نقطهٔ P بر دایرهٔ K'_1 رسم می‌شوند.

به جای هر یك از دایره‌های مفروض می‌توان یك نقطه یا یك خط راست درنظر گرفت. مکان هندسی مرکزهای دایره‌هایی که برخط راست l مماس باشند و از نقطهٔ P بگذرند، عبارت است از یك سهمی که خط راست l خط هادی آن و نقطهٔ P کانون آن است.

۴. مسأله‌هایی برای تمرین

در مسأله‌های زیر، بعد ازصورت هر مسأله، حرفی در داخل پرانتز گذاشته شده است. این حرف نشانهٔ آن مکان هندسی است که درحل آن مسأله، کاربرد دارد.

از خواننده می‌خواهیم، این مسأله‌ها را به‌کمك پرگار و خط‌کش حل کند و دربارهٔ جواب آن به بحث بپردازند.

۰۱ دو پاره خط a و b که نسبت به‌هم به ترتیب دلخواهی قرار گرفته‌اند، و دو زاویهٔ α و β مفروض‌اند. می‌خواهیم نقطه‌ای را پیدا کنیم

که از آن جا، پاره خطهای a و b به ترتیب با زاویه‌های α و β دیده شوند (e) (مسألهٔ پوته‌نو *Pothenos*).

۲. سه خط راست g_1، g_2 و g_3 داده شده است. می‌خواهیم نقطه‌ای به دست آوریم که فاصله‌های آن از سه خط راست مفروض به نسبت‌های مفروض باشد (g).

۳. سه دایره مفروض است. می‌خواهیم نقطه‌ای را پیدا کنیم که بتوان از آن جا، مماس‌های با طول‌های برابر، برسه دایره رسم کرد (h).

۴. یك دایره و دو نقطهٔ A و B مفروض‌اند. می‌خواهیم مثلث قائم‌الزاویه‌ای در دایره محاط کنیم که ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن از نقطه‌های مفروض A و B بگذرند (e).

۵. دو خط راست موازی و نقطهٔ P داده شده‌اند. می‌خواهیم دایره‌ای رسم کنیم که بر دو خط راست مفروض مماس باشد و، در ضمن، از نقطهٔ مفروض P بگذرد $(a$، $d)$.

۶. سه دایره برابر داده شده است. می‌خواهیم دایره‌ای رسم کنیم که بر هر سه دایره، از بیرون مماس باشد (c).

۷. پاره خط مفروض a را به دو بخش x و y طوری تقسیم کنید که واسطهٔ هندسی بین x و y برابر با پاره خط مفروض دوم b باشد (b).

۸. مثلث ABC مفروض است. نقطه‌ای را پیدا کنید که از آن جا، هر سه ضلع مثلث: تحت زاویهٔ ۱۲۰ درجه دیده شوند (e).

۹. نقطه‌های A، B، C و D روی خط راستی داده‌شده‌اند. می‌خواهیم نقطه‌ای را پیدا کنیم که از آن جا بتوان پاره خطهای AB، BC و CD را تحت یك زاویه دید (f)[۱۴].

۱۰. سه دایره داده شده است. می‌خواهیم دایره‌ای رسم کنیم که هر سه دایره را تحت زاویهٔ قائمه قطع کند (h)[۱۵].

۱۱. سه دایره مفروض است. می‌خواهیم نقطه‌ای پیدا کنیم که هر سه دایره را از آن، با یك زاویه ببینیم[۱۶]. (فاصلهٔ نقطهٔ مجهول از مرکزهای دایره‌ها باید برنسبت شعاع‌های متناظر باشند.)

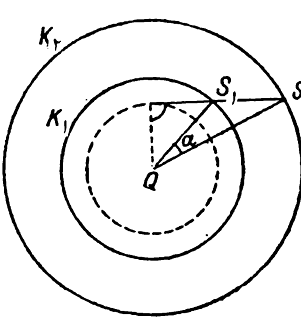
۱۲. دو دایرهٔ K_1 و K_2 و پاره خط s مفروض‌اند. می‌خواهیم دایره‌ای

با شعاع مفروض r چنان رسم کنیم که مرکز آن برمحیط دایرهٔ K_1 واقع باشد و وتری که از دایرهٔ K_2 جدا می کند به طول s باشد. (مکان هندسی مرکزهای همهٔ دایره‌های به شعاع r که از دایرهٔ K_2 وتری به طول s جدا می کنند، چیست؟)

۱۳. خط راست g، نقطهٔ A واقع بر آن و نقطهٔ B در بیرون آن مفروض‌اند. می‌خواهیم نقطهٔ X را روی g طوری پیدا کنیم که داشته باشیم: $\overline{AX}+\overline{XB}=s$، که در آن. s پاره خط مفروضی است (c). (روی خط راست مفروض و از نقطهٔ A، پاره خط s را جدا کنید.)

۱۴. سه خط راست a، b، c و نقطهٔ P مفروض است. می‌خواهیم خط راست x را از نقطهٔ P طوری بگذرانیم که سه نقطهٔ برخورد آن با خط‌های راست مفروض، همراه با نقطهٔ P، رشتهٔ توافقی نقطه‌ها را تشکیل دهند. (مکان هندسی نقطه‌هایی که نقطهٔ P را به صورت توافقی از دو خط راست جدا می کنند، کدام است[17]؟ مسأله چند جواب دارد؟)

۱۵. دو دایرهٔ هم مرکز K_1 و K_2 و نقطهٔ P مفروض‌است. می‌خواهیم خط راست x را از نقطهٔ P طوری بگذرانیم که پاره خطی از آن که بین دو دایرهٔ هم مرکز قرار دارد، ازمرکز به‌زاویهٔ مفروض α دیده شود. (اگر یکی ازضلع‌های زاویهٔ α را تا برخورد بادایرهٔ K_1 و دیگری را تا برخورد با دایرهٔ K_2 ادامه دهیم و نقطه‌های برخورد را با خط راستی به هم وصل کنیم، وقتی که زاویهٔ α دور مرکز دوران کند، این خط راست، دایرهٔ هم‌مرکز جدیدی را دور می‌زند (شکل ۱۱).



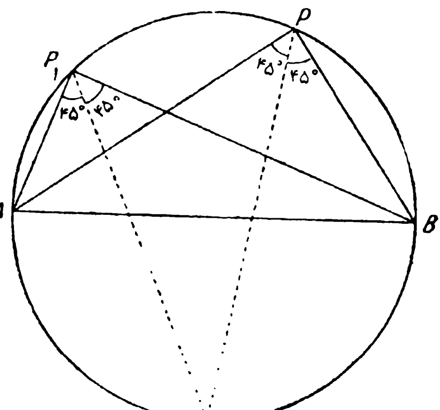
شکل ۱۱

۰۱۶ دو زوج خط‌هـای راست مـوازی و نقطهٔ P داده شده است. می‌خواهیم از نقطهٔ P، خط راستی چنـان رسم‌کنیم کـه روی هر دو زوج خط‌های موازی، پاره خط‌های برابر به‌وجود آورد. (متوازی‌الاضلاعی را که از دو زوج خط‌های موازی به‌وجود می‌آید، مورد بررسی قرار دهید.)

۰۱۷ چهار نقطهٔ A، B، C و D مفروض است. می‌خواهیم مربعی رسم کنیم که ضلع‌های آن از این چهار نقطه بگذرند. (اگر دایره‌ای به قطر AB رسم کنیم ــ شکل ۱۲ ــ آن وقت نیمساز زاویـهٔ APB از نقطهٔ S واقع بر محیط دایره می‌گذرد که، جای آن، با حرکت نقطهٔ P در روی محیط دایره تغییر نمی‌کند.)[۱۸]

۰۱۸ دو دایرهٔ K_1 و K_2 داده شده است. می‌خواهیم خط راستی رسم کنیم که در یکی از دایره‌ها وتری به‌طول مفروض s_1 و در دیگری وتـری به‌طول مفروض s_2 ایجاد کند. (از مماس مشترك‌های دو دایره استفاده کنید.)

۰۱۹ یك چهار ضلعی مفروض است. می‌خواهیم متوازی‌الاضلاعی در این چهار ضلعی محاط کنیم کـه ضلع‌هـای آن امتدادهـای مفروضی داشته باشند. (اگر یکی از ضلع‌هـای چهار ضلعی را بزرگ‌ کنیم، مکان هندسی رأس چهارم متوازی‌الاضلاع، که ضلع‌های آن امتدادهای مفروضی دارند، کدام است؟)[۱۹]



شکل ۱۲

§ ۳. روش شکل‌های متشابه

۱. بعضی از مسأله‌های ساختمانی هندسه دارای این ویژگی هستند که، بی‌نهایت جوابی که با رعایت بخشی از شرطهای مفروض به دست می‌آید، دستگاهی از شکل‌های متشابه را تشکیل می‌دهند. مثلاً اگر بخواهیم مثلثی را رسم کنیم که دو زاویه و محیط آن مفروض باشد، وقتی که فرض معلوم بودن محیط را کنار بگذاریم و تنها دو زاویهٔ معلوم را در نظر بگیریم، همهٔ مثلث‌هایی که به دست می‌آیند، متشابه با یکدیگرند.

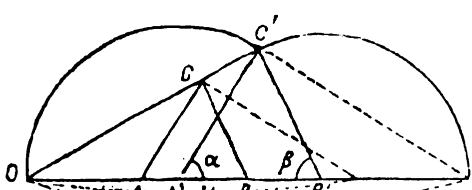
برای حل چنین مسأله‌هایی، بهتر است از روش شکل‌های متشابه استفاده کنیم: ابتدا شکلی را رسم می‌کنیم که با شکل مجهول ما متشابه باشد، سپس آن را به نسبتی که لازم است، بزرگتر یا کوچکتر می‌کنیم.

در مثال بالا، به‌کمك زاویه‌های α و β مثلثی مثل $A'B'C'$ ساخته می‌شود که محیط آن را u' می‌نامیم (شکل ۱۳)؛ سپس، O را مرکز تشابه می‌گیریم، u را رسم می‌کنیم و بالاخره خط‌های راست موازی را می‌کشیم، مثلث مجهول ABC به دست می‌آید.

۲. روش شکل‌های متشابه در دو حالت کاربرد دارد:

α) وقتی که برای تعیین شکل، تنها یك خط داده شده است و، به جز آن، تنها زاویه‌ها و نسبت‌ها مفروض باشد. (اگر خط مفروض را کنار بگذاریم، همهٔ شکل‌هایی که با بقیهٔ شرطها سازگارند، متشابه‌اند.)

β) وقتی که شکل مجهول باید وضعی نسبت به خطها و نقطه‌های مفروض داشته باشد که: با کنار گذاشتن یکی از شرطها، به مجموعه‌ای از شکل‌های متشابه برسیم.



شکل ۱۳

۳. اکنون مسأله‌هایی را به عنوان تمرین مطرح می‌کنیم کـه با روش شکل‌های متشابه قابل حل‌اند.

۲۰. s، محیط یك مربع و قطر آن داده شده است. می‌خواهیم مربع را رسم کنیم.

۲۱. مربعی را درمثلث مفروض محاط کنید.

۲۲. دو شعاع از دایره‌ای داده شده است. می‌خواهیم وتری از دایره را رسم کنیم که به وسیلهٔ این دو شعاع به سه بخش برابر تقسیم شود. (روی یك خط راست سه پاره خط $A'B'$، $B'C'$ و $C'D'$ را برابر با هم جدا و عمود منصف پـاره خط $A'D'$ را رسم کنید. روی این عمود نقطه‌ای را به دست آورید کـه پاره خط $B'C'$ از آن جا به زاویهٔ α دیـده شود. شکل حاصل، متشابه بـا شکل مجهول است. α را زاویـهٔ بین دو شعاع مفروض گرفته‌ایم.)

۲۳. یك چهار ضلعی مفروض است. یك لوزی در چهار ضلعی محاط کنید که ضلع‌های آن موازی بـا قطرهـای چهار ضلعی باشد. (یك لوزی دلخواه رسم کنید که ضلع‌های آن موازی بـا قطرهـای چهار ضلعی باشد. سپس، از رأس‌های این لوزی خطهای راستی موازی بـا ضلع‌هـای چهار-ضلعی رسم کنید.)

۲۴. می‌خواهیم دایـره‌ای رسم کنیم کـه از نقطهٔ مفروض بگذرد و بر خطهای راست مفروض a و b مماس باشد.[۲۰]

۲۵. دو خـط راست l و a و نقطهٔ F در بیـرون خـط راست a مفروض‌اند. می‌خواهیم نقطهٔ X را روی a طوری پیدا کنیم که فاصلهٔ آن از l دو برابر فاصلهٔ آن از F باشد. (محل برخورد خطهای راست a و l را، مرکز تشابه بگیرید.)

۲۶. دو نقطهٔ A و B و خط راست g مفروض‌اند. می‌خواهیم‌دایره‌ای رسم‌کنیم که از نقطه‌های A و B بگذرد و برخط راست g مماس باشد.

۲۷. ارتفاع‌های h_a، h_b و h_c از مثلثی داده شده است. مثلث را رسم کنید. (ارتفاع‌هـای مثلث با ضلع‌های h_a، h_b و h_c بـا ضلع مثلث مجهول متناسب‌اند.)

۲۸. دو منحنی $K_۱$ و $K_۲$ و نقطهٔ P مفروض‌اند. می‌خواهیم خط راست x را از نقطهٔ P بگذرانیم، به نحوی که داشته باشیم: $PA_۱ : PA_۲ = m : n$، که در آن، $A_۱$ و $A_۲$ به ترتیب محل برخورد خط راست x با منحنی‌های $K_۱$ و $K_۲$ و m و n عددهای مفروضی هستند. (نقطهٔ P را مرکز تشابه بگیرید و منحنی $K'_۲$ را متشابه با منحنی $K_۲$ با نسبت $\frac{m}{n}$ رسم کنید، یعنی منحنی $K_۲$ را در $\frac{m}{n}$ ضرب کنید.)

§ ۴. روش شکل‌های کمکی

۱. بعضی مسأله‌های هندسی را از این راه می‌توان حل کرد که خط‌هایی را به شکل مجهول اضافه کنیم و از این راه شکل‌هایی را به دست آوریم که با شرط‌های مفروض قابل رسم باشند.

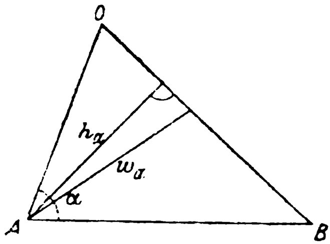
ضمن بررسی شکلی که باید رسم کنیم، باید به این نکته‌ها توجه کنیم:

پاره خط‌های مفروض، در شکل داخل شده باشند. مثلاً اگر مجموع دو پاره خط داده شده است، باید این مجموع در شکل دیده شود.

سپس باید کوشش کرد خط‌ها، زاویه‌ها یا بخش‌های کاملی از شکل را پیدا کرد که بتوان آن‌ها را به کمك پاره خط‌های مفروض رسم کرد؛ به‌خصوص باید مثلث‌هایی را پیدا کرد که سه ضلع آن‌ها معلوم باشد.

۲. چند مسأله برای تمرین می‌آوریم که، با حل آن‌ها، می‌توان با این روش بهتر آشنا شد.

۲۹. می‌خواهیم مثلث ABC را با معلوم بودن زاویهٔ α، ارتفاع h_a



شکل ۱۴

و نیمساز w_a از زاویهٔ α رسم کنیم. (با پاره خط‌های h_a و w_a، یک مثلث قائم‌الزاویه ساخته می‌شود.)

۳۰. مثلثی رسم کنید که ارتفاع آن h_a، میانهٔ آن m_a (که از رأس A می‌گذرند) و شعاع دایرهٔ محاطی آن معلوم باشد. (ابتدا با پاره‌خط‌های h_a و m_a، مثلث قائم‌الزاویه‌ای بسازید و دایرهٔ محاطی را با روش مکان‌های هندسی جست‌وجو کنید.)[۲۱]

۳۱. ازمثلثی ضلع a، مجموع s دو ضلع b و c و ارتفاع h_b مفروض است، آن را رسم کنید. (پاره خط $b+c$ را در شکل وارد کنید؛ ضلع b را ازجهت C به A به اندازهٔ پاره خط c امتداد دهید.)

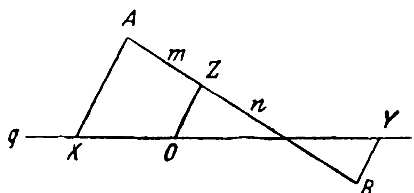
۳۲. ضلع a (رو به روی زاویهٔ α) و s، مجموع دو ضلع دیگر،معلوم است. می‌خواهیم مثلث را رسم کنیم. (b را درجهت A به اندازهٔ c امتداد دهید و، درنتیجه، زاویهٔ $\frac{\alpha}{۲}$ را به دست آورید.)

۳۳. کمان مفروضی از دایره را، طوری به دو بخش تقسیم کنید که مجموع وترهای متناظر آن‌ها، حداکثر باشد. (اثبات هندسی.)[۲۲]

۳۴. از نقطهٔ برخورد دو دایره، خط راستی بگذرانید که مجموع وترهایی که روی آن جدا می‌شود، حداکثر مقدار ممکن باشد.[۲۳]

۳۵. خط راست g، نقطهٔ O روی آن و نقطه‌های A و B دربیرون آن داده شده است. می‌خواهیم از نقطه‌های A و B، خط‌های راست موازی AX و BY را طوری رسم کنیم که داشته باشیم. $XO:OY=m:n$. (پاره خط AB را به نسبت $m:n$ تقسیم کنید (شکل ۱۵) و از نقطه‌های A و B، خط‌های راستی موازی ZO بکشید.)

۳۶. دو خط راست موازی مفروض‌اند. روی یکی از خط‌های‌راست نقطهٔ P و روی دیگری نقطهٔ Q و بالاخره در بیرون آن‌ها، نقطهٔ O داده شده



شکل ۱۵

است. نقطه‌های Y و X را روی این خطهـای راست طوری پیدا کنید کـه خط‌های راست PX و QY موازی باشند و خط راست XY از O بگذرد.[۲۴] (روشن است که P و X یا Q و Y، روی یکی از خطهـای راست مفروض نیستند.)

۳۷. دو نقطهٔ P و Q و خط راست g که از Q گذشته است، مفروض است. می‌خواهیم دو نقطهٔ X و Y را به یك فاصله از Q روی g طوری پیدا کنیم که پاره خط XY از نقطهٔ P با زاویهٔ α دیـده شود. (پاره خط PQ را تا نقطهٔ R ادامه دهید که QR با PQ برابر باشد.)[۲۵]

۳۸. مجموع ضلع‌های مثلث، یعنی $s=a+b+c$، زاویهٔ α وشعاع دایرهٔ محیطی (R) آن مفروض‌اند. می‌خواهیم مثلث را رسم کنیم.[۲۶]

۳۹. دو خط راست موازی a و b، نقطهٔ A روی خط راست a، نقطهٔ B روی خط‌راست b و نقطهٔ O بین دوخط موازی داده شده‌است. می‌خواهیم خط راستی از نقطهٔ O بگذرانیم کـه خطهای راست a و b را در دو نقطهٔ X و Y طوری قطع کند که داشته باشیم: $\overline{AX}+\overline{BY}=s$، که در آن، s پاره خط مفروضی است. (علامت پاره‌خطهای $\overline{AX}$ و $\overline{BY}$ را در نظـر داشته باشید.)[۲۷]

§ ۵. روش تبدیل شکل‌ها
(انتقال موازی، جا به‌جایی، دوران)

A) انتقال موازی

۱. برای حل مسأله‌های ساختمانی هندسه، گاهی بهتر است بخش‌های جداگانهٔ شکل را به موازات خود منتقل کنیم و آن را به صورتی درآوریم که برای حل ساده‌تر باشد.

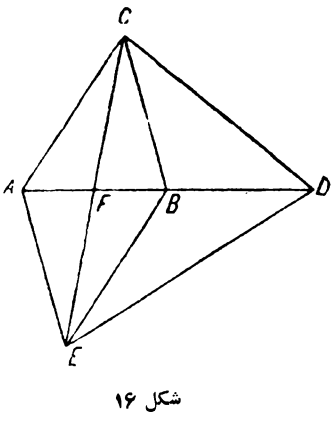
مثلاً اگر دو پاره خط و زاویهٔ بین آن‌ها مفروض باشد، و اگر یکی از پاره خطهـا را به موازات خودش طوری انتقـال دهیم کـه یکی از دو انتهای آن بریکی از دو انتهـای پاره خط دیگر منطبق شود، مثلثی به دست می‌آید کـه از آن، دو ضلع و زاویـهٔ بین آن‌ها معلوم است. این مثلث را

می‌توان به سادگی رسم کرد که ممکن است برای حل مسألهٔ ما مفید باشد.

نوع دیگری از انتقال موازی هم می‌تواند مفید باشد: مثلاً اگر شکل مجهول ما، یک چند ضلعی باشد و از نقطهٔ مفروضی پاره خط‌هایی موازی و مساوی ضلع‌های آن رسم کنیم، انتهای این پاره خط‌ها یک چند ضلعی تازه درست می‌کنند که اغلب به سادگی قابل رسم است و، درضمن، به کمک آن می‌توان چند ضلعی مجهول را رسم کرد.

۲. برای مثلث و چهارضلعی دو نوع انتقال موازی ساده وجود دارد:

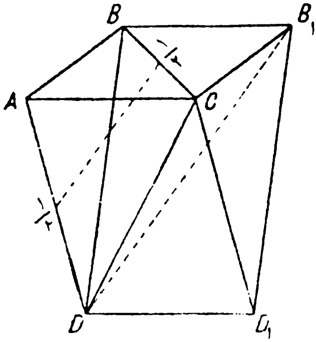
اگر در مثلث ABC (شکل ۱۶)، ضلع‌های AB، BC و AC را به ترتیب به موقعیت‌های BD، EA و EB منتقل کنیم، آن وقت مثلث جدید CDE به دست می‌آید. ضلع‌های مثلث اخیر موازی با میانه‌های مثلث اصلی و دو برابر آن‌ها هستند؛ زاویه‌های متناظر با ضلع‌ها، میانه‌ها و ارتفاع‌ها در مثلث اصلی و مثلث جدید CDE، مقدارهایی برابرند.



شکل ۱۶

۳. برای چهارضلعی $ABCD$، انتقال موازی به‌صورت زیر، درمورد اغلب مسأله‌ها مفید است.

پاره خط AC (شکل ۱۷) را به موقعیت‌های BB_1 و DD_1 منتقل می‌کنیم؛ از این راه، متوازی‌الاضلاع BB_1DD_1 به دست می‌آید. ضلع‌های این متوازی‌الاضلاع، طولی برابر با قطرهای چهارضلعی اصلی دارند؛ پاره‌خط‌هایی که از C آغاز شده‌اند، برابر با ضلع‌های چهارضلعی $ABCD$



شکل ۱۷

هستند و زاویه‌های دورأس C برابرند بازاویه‌های‌همان‌چهارضلعی؛ قطرهای متوازی‌الاضلاع موازی و برابر با دو برابر پاره‌خطهایی هستند که وسط ضلع‌های روبه‌روی چهارضلعی را به‌هم وصل کرده‌اند.

۴. بازهم چند مساله برای تمرین پیشنهاد می‌کنیم.

۴۰. سه میانهٔ یك مثلث داده شده‌اند. مثلث را رسم کنید.

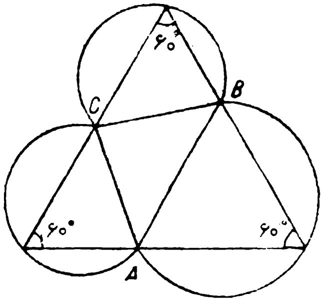
۴۱. دو ضلع یك متوازی‌الاضلاع و زاویهٔ بین دو قطر آن مفروض است. متوازی‌الاضلاع را رسم کنید. (یکی از قطرها را طوری منتقل کنید که یکی از دو انتهای آن بر انتهای قطر دیگر منطبق شود.)

۴۲. دو دایره مفروض‌اند. پاره خطی به طول مفروض s و موازی با خط راست مفروض طوری رسم کنید که دوانتهای آن، بر محیط این دودایره واقع باشد.[۲۸]

۴۳. مثلث ABC مفروض است (شکل ۱۸). می‌خواهیم مثلث متساوی‌الاضلاعی بر آن محیط کنیم، که مساحت آن حداکثرمقدار ممکن باشد. (مساله منجربه‌آن می‌شود که ازنقطهٔ برخورد دو دایره خط راستی چنان رسم کنیم که مجموع طول وترهای حاصل در دو دایره، بیشترین مقدار را داشته باشد: مسالهٔ ۳۴.)

۴۴. قطرها و دو ضلع موازی یك ذوزنقه داده شده است. ذوزنقه را رسم کنید.[۲۹]

۴۵. طول ضلع‌های یك چهارضلعی وطول پاره‌خطی که وسط قطرهای



شکل ۱۸

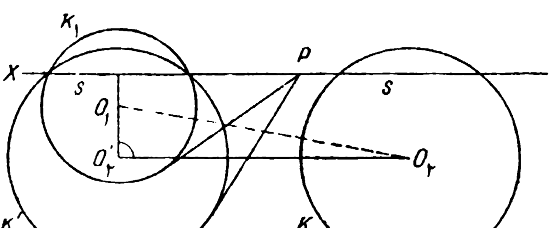
آن را به هم وصل می‌کند، داده شده است. چهارضلعی را رسم کنید. (وسط قطرها را به وسط ضلع‌ها وصل کنید.)[۳۰]

۴۶. دو نقطهٔ A و A' روی خط راست g قرار دارند. می‌خواهیم آن‌ها را به وسیلهٔ دو نقطهٔ P و P'، طوری به نسبت توافقی تقسیم کنیم که پاره‌خط PP'، طولی برابر مقدار مفروض s داشته باشد.[۳۱]

۴۷. ذوزنقه‌ای را رسم کنید که دوقطر و دوضلع موازی آن معلوم باشد.[۳۲]

۴۸. از یك چهارضلعی، دو قطر، دو ضلع روبه‌رو و زاویهٔ بین همین دو ضلع را داده‌اند. چهارضلعی را رسم کنید.[۳۳]

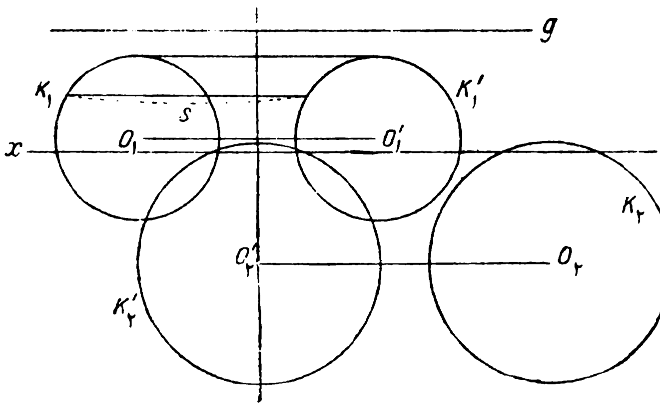
۴۹. نقطهٔ P و دودایرهٔ $K_۱$ و $K_۲$ مفروض‌اند (شکل ۱۹). خط راستی از نقطهٔ P چنان بگذرانید که در دو دایره، وترهایی برابر به وجود آورد. (فرض کنید مساله حل شده است. دایرهٔ $K_۲$ را موازی خط راست مجهول تا آن جا منتقل کنید که وتر آن بر وتر دایرهٔ $K_۱$ منطبق شود. پاره‌خطی که



شکل ۱۹

مرکزهای دو دایره را به هم وصل کرده است، از مرکز جدید O'_2 با زاویهٔ قائمه دیده می‌شود. طول مماسی که از نقطهٔ P بر دایرهٔ K'_2 رسم کنیم، برابر با طول مماسی است که از همین نقطه بر دایرهٔ K_1 رسم شود.)[۳۴]

۵۰. دو دایرهٔ K_1 و K_2 و خط راست g داده شده است. می‌خواهیم خط راستی موازی g طوری رسم کنیم که مجموع دو وتری که در دایره‌ها ایجاد می‌کند، برابر با پاره‌خط مفروض s باشد. (اگر دایرهٔ K_1 را موازی خط راست مفروض بـه اندازهٔ s منتقل کنیم (شکل ۲۰) دایرهٔ K'_1 به دست می‌آید؛ سپس، اگر عمودمنصف پاره‌خط $O_1O'_1$ (خط‌المرکزین) را رسم و



شکل ۲۰

دایرهٔ K_2 را موازی خط مفروض طوری منتقل کنیم که مـرکـزآن بر این عمودمنصف قرار گیرد، آن وقت، خط راست X پیدا خواهد شد.)

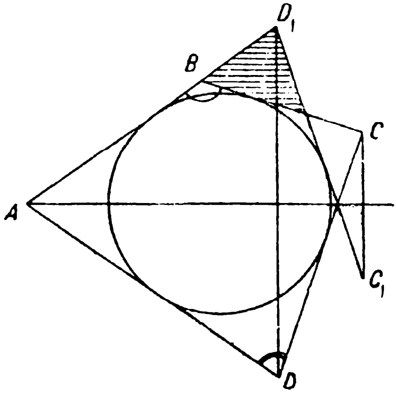
B) جابه‌جایی

۱. دراین‌روش، باجابه‌جا کردن بخشی‌ازشکل، آن را درموقعیتی قرار می‌دهند که برای حل ساده‌تر باشد. در این روش باید پاره‌خطهای مفروض را در شکل واردکرد، زاویه‌ها و پاره‌خطهای برابر را بـه صورت منطبق برهم درآورد یا شکل‌های متقارن را رسم کرد، بـه نحوی که نقطهٔ مجهول بر محور تقارن قرار گیرد.

۲. روش، با حل مساله‌هایی که برای تمرین داده شده است، روشن می‌شود.

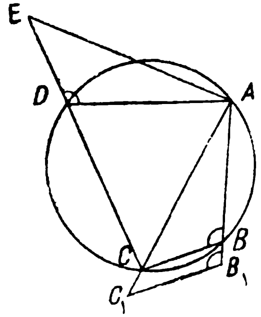
۵۱. مثلثی رسم کنید کــه دو ضلع آن، a و b، و تفاضل زاویه‌های روبه‌روی ایــن دو ضلع، $\alpha-\beta=\delta$، معلوم باشد. (اگــر مثلث مجهول را طوری بــر گردانیم که A بر B و B بر A منطبق شود؛ مثلث جدیدی به‌دست می‌آید که دو ضلع آن برابر a و b و زاویهٔ بین آن‌ها برابر δ است.)

۵۲. ضلع‌های AD و AB، و زاویه‌های D و B از چهارضلعی $ABCD$ مفروض است. می‌دانیم کــه ایــن چهــارضلعی، محیطی است یعنی می‌توان دایره‌ای درآن محاط کــرد. چهارضلعی را رسم کنید. (نیمساز زاویهٔ A را رسم کنید (شکل ۲۱)؛ اگر D_1 و C_1 را به ترتیب قرینهٔ نقطه‌های D و C نسبت به این نیمساز بگیریم، آن وقت، خط راست C_1D_1 هم بر دایره مماس خواهد بود.)[۳۵]



شکل ۲۱

۵۳. چهار ضلع یك چهارضلعی محاطی معلوم است؛ آن را رسم کنید. (AB_1 را برابر AD بسازید (شکل ۲۲)، B_1C_1 را موازی BC رسم کنید، DE را برابر B_1C_1 بگیرید؛ دراین صورت مثلث ADE با مثلث AB_1C_1 برابر می‌شود. ابتدا مثلث CAE را بسازیــد؛ ضمناً بــایــد توجه کــرد که $AE : AC = AD : AB$؛ §۲، روش مکان‌های هندسی، f را ببینید.)



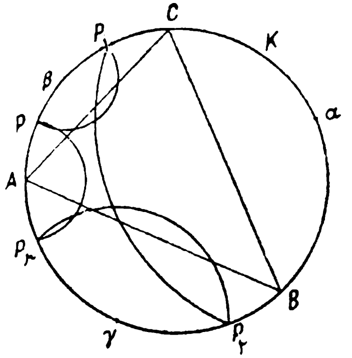
شکل ۲۲

۵۴. خط راست l، نقطهٔ F و خط راست g که از F گذشته است، مفروض‌اند. می‌خواهیم نقطهٔ X را روی خط راست g طوری پیدا کنیم که از خط راست l و نقطهٔ F به یك فاصله باشد. (خط راست n را عمود بر g در نقطهٔ F و نیمساز زاویهٔ بین n و l را رسم کنید.)

۵۵. دایرهٔ K، خط راست g و نقطهٔ A واقع بر g مفروض‌اند. می‌خواهیم دایره‌ای به مرکز نقطه‌ای مثل X طوری رسم کنیم که در نقطهٔ A بر خط راست g مماس باشد و بر دایرهٔ K عمود شود. (اگر $K'=K$، خط راست g را درنقطـهٔ A، تحت زاویـهٔ قائمه قطع کند، نقطهٔ X روی محور اصلی دایره‌های K و K'، یعنی عمودمنصف پاره‌خطی که دو مرکز دایره‌های K و K' را به هم وصل می‌کند، قرار دارد.)

۵۶. می‌خواهیم مثلث ABC را در دایـرهٔ K طوری محاط کنیم که نقطه‌های مفروض α، β و γ وسط کمان‌های نظیر ضلع‌های مثلث باشند. (اگر نقطهٔ دلخواه P از محیط دایره را دور β دوران دهیم تا P_1 به دست آید، سپس P_1 را دور α تا نقطهٔ P_2 و بالاخره، P_2 را دور γ تا نقطهٔ P_3 دوران دهیم، آن وقت، نقطهٔ A وسط کمان P_3P خواهد بود؛ شکل ۲۳.)[۳۶]

۵۷. دایرهٔ K و سه خط راست a، b و c کـه از مرکز دایره آغاز شده‌اند، مفروض‌اند. می‌خواهیم مثلث ABC را طوری بر دایره محیط کنیم که راس A روی خط راست a، راس B روی خط راست b و راس C روی خط راست c قرار گیرد. (اگر مماس دلخواه t را بر دایره رسم کنیم ، قرینهٔ آن را نسبت بـه خط راست a، t' و قرینهٔ t' نسبت به خط راست b را t''

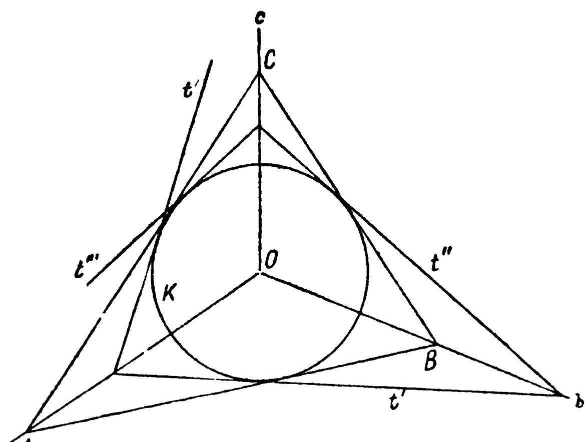


شکل ۲۳

وقرینهٔ t'' نسبت به‌خط راست c را t''' بگیریم (شکل ۲۴)، آن‌وقت ضلع b ازمثلث مجهول، با دو مماس t و t'''، زاویه‌های برابر می‌سازد.)

۵۸. مثلث ABC وخط راست g که از راس C می گذرد، مفروض‌اند. می‌خواهیم نقطهٔ X را روی g طوری پیدا کنیم که ازآن‌جا، ضلع‌های AC و BC به یك زاویه دیـده شوند. (قرینهٔ مثلث ABC را نسبت به خط‌راست g پیدا کنید.)

۵۹. مثلث ABC و نقطهٔ D واقع بـر خط راست AB مفـروض‌اند.



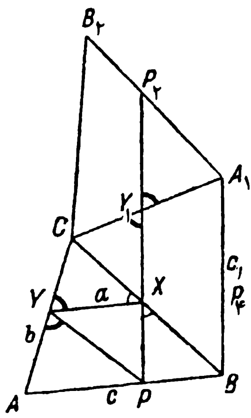
شکل ۲۴

نقطهٔ X را روی AC طوری پیدا کنید که پاره‌خطهای AD و DB، از آن‌جا به‌یك زاویه دیده شوند. (B_1 قرینهٔ نقطهٔ B نسبت به خط راست DX را پیدا کنید.)

۶۰. دو منحنی C_1 و C_2 و خط راست g مفروض‌اند. خط راست x را عمود بر g طوری رسم کنید که دو منحنی را در دو نقطه چنان قطع کند که فاصلهٔ نقطهٔ برخورد g و x تا دو نقطهٔ برخورد برابر باشد. (منحنی C_2 را دور g برگردانید و نقطهٔ برخورد منحنی حاصل را با C_1 مورد مطالعه قرار دهید.)

۶۱. خط راست g و دو نقطهٔ A و B واقع در یك طرف g مفروض‌اند. می‌خواهیم نقطهٔ X را روی g طوری پیدا کنیم که مجموع $\overline{AX}+\overline{XB}$ حداقل مقدار ممکن باشد. (B_1 قرینهٔ نقطهٔ B نسبت به g را معین و به A وصل کنید.) [۳۷]

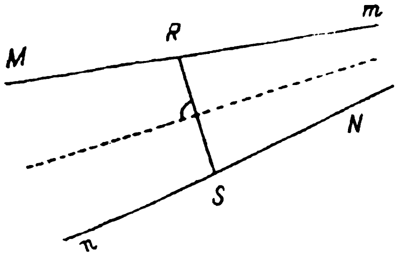
۶۲. مثلث ABC و نقطهٔ P واقع بر ضلع AB مفروض‌اند. می‌خواهیم مثلث جدید PXY را در مثلث ABC طوری محاط کنیم که ضلع‌های آن زاویه‌هایی برابر با ضلع‌های a و b از مثلث مفروض بسازند (شکل ۲۵)[۳۸].



شکل ۲۵

۶۳. مثلث ABC مفروض است. می‌خواهیم مثلثی در آن محاط کنیم که حداقل محیط را داشته باشد. (با روشی که در مسالهٔ ۶۲ به‌کار بردیم،

مسالهٔ ما منجر به مسالهٔ زیر می‌شود (شکل ۲۶): دوخط راست m و n، نقطهٔ M روی m و نقطهٔ N روی n مفروض‌اند. مـی خواهیم روی این خط‌های راست، به ترتیب، نقطه‌های R و S را طـوری پیدا کنیم کـه داشته باشیم $\overline{RM}=\overline{SN}$ و در ضمن، طول $\overline{RS}$ حداقل مقدار ممکن باشد. پاره خط RS بر نیمساز زاویهٔ بین خط‌های راست m و n عمود است.[۳۹]



شکل ۲۶

c) دوران

۱. اگر شکل f را دور مرکز O به‌اندازهٔ زاویهٔ α دوران دهیم، همهٔ نقطه‌های شکل کمان‌هایـی را طی می‌کنند که شعاع‌های مختلفی دارند، ولی متناظر با همان زاویهٔ مرکزی α هستند.

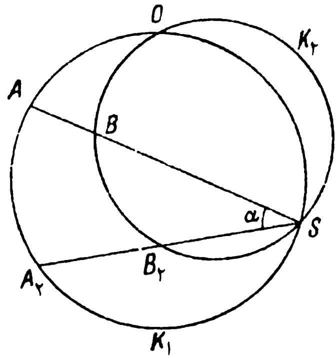
برای این‌که خط راست g را بـه اندازهٔ زاویهٔ α دوران دهیم، مثلاً می‌توان قائم براین خط راست را بـه اندازهٔ α دوران داد. زاویهٔ بین g_1، وضع جدید خط راست، و وضع نخستین آن، برابر است با α، یعنی زاویهٔ دوران.

اگر نقطهٔ O را مرکز تشابه بگیریم وشکل f_1 را به‌نسبت معینی بزرگ یا کوچك کنیم (یا به‌بیان پترسن، آن را در عددی ضرب کنیم)، باشکل جدید f_2 و، بنابراین، با شکل f متشابه است.

۲. برعکس، اگر شکل‌های f و f_2 واقع بر یك صفحه، متشابه و هم جهت[۴۰] باشند، همیشه می‌توان نقطهٔ O را طـوری پیدا کرد که بتوان شکل f_2 را از شکل f، از طریق دوران شکل f دور نقطهٔ O و سپس ضرب دریك عدد معین، به‌دست آورد.

کافی است قضیه را برای حالتی ثابت کنیم که شکل f، پاره‌خط AB

وشکل f_2، پاره‌خط A_2B_2 باشد، زیرا وقتی که دو شکل هم‌جهت باشند، با انطباق دو پاره‌خط، همهٔ نقطه‌های متناظر آن‌ها بر هم‌منطبق می‌شوند برای حل مساله، باید توجه کرد، زاویهٔ بین پاره‌خط‌ها در نقطهٔ S (شکل ۲۷)، همان زاویهٔ



شکل ۲۷

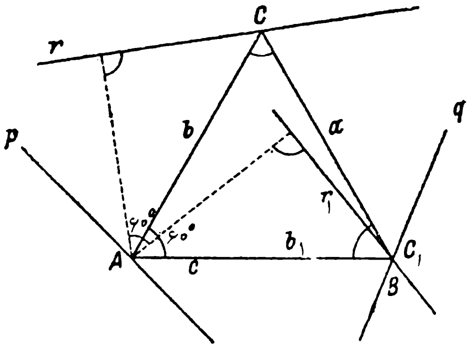
مجهول دوران α است. به‌این‌ترتیب، نقطهٔ O با نقطه‌های A_1، A_2 و S روی دایره‌ای مثل K_1 و با نقطه‌های B_1، B_2 و S روی دایره‌ای مثل K_2 قرار دارد[41] عددی که باید شکل f را در آن ضرب کرد، برابر است با $\frac{A_2B_2}{AB}$.

۳. در بسیاری از مساله‌ها می‌توان دوران دور نقطه را با موفقیت به‌کار برد و، درضمن در صورت لزوم، از قضیهٔ بالا هم استفاده کرد.

باز هم از مساله‌هایی که برای تمرین آورده‌ایم، استفاده می‌کنیم تا مطلب روشن‌تر شود.

۶۴. سه خط راست p، q، r و نقطهٔ A واقع بر p داده شده است. مثلث متساوی‌الاضلاعی بسازید که یکی از رأس‌های آن بر A و دو رأس دیگرش برخط‌های راست q و r واقع باشد. (ضلع b، خط راست r وهمراه با آن‌ها، نقطهٔ C را به اندازهٔ ۶۰ درجه دوران دهید تا بر b_1، r_1 و c_1 منطبق شوند.)

۶۵. مربعی داده شده است. می‌خواهیم مثلث متساوی‌الاضلاعی در آن محاط کنیم که یکی ازرأس‌های آن برنقطهٔ مفروضی واقع بر یکی ازضلع‌های مربع، منطبق باشد.[42]



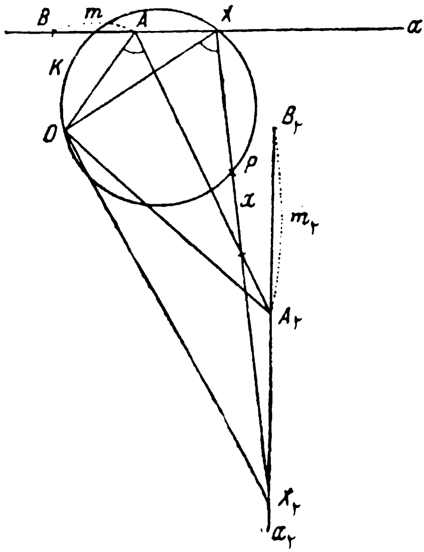
شکل ۲۸

۶۶. خط‌های راست a و a_2 ، نقطهٔ A واقع بر a، نقطهٔ A_2 واقع بر a_2 و نقطهٔ P در بیرون دوخط راست، داده شده‌اند. می‌خواهیم خط x را از نقطهٔ P طوری بگذرانیم که خط‌های راست a و a_2 را به‌ترتیب در نقطه‌های X و X_2 قطع کند و داشته باشیم:

$$\overline{AX} : \overline{A_2X_2} = m : m_2$$

(m و m_2، دو عدد مفروض‌اند). (روی خط‌های راست a و a_2، از نقطه‌های A و A_2 (شکل ۲۹)، پاره خط‌هایی به‌ترتیب برابر با m و m_2 جدا کنید؛ انتهای این پاره‌خط‌ها را B و B_2 می‌نامیم. سپس نقطه‌های A و A_2، B و B_2 را همچون نقطه‌های متناظر دو دستگاه متشابه در نظر می‌گیریم و (با توجه به‌شکل ۲۷) مرکز دوران O را پیدا می‌کنیم. چون دومثلث XX_2O و AA_2O متشابهند، بنابراین $\hat{X} = \hat{A}$؛ به‌این ترتیب، نقطهٔ X بر کمان K واقع است که روی پاره‌خط OP، شبیه شکل ۴، ساخته می‌شود.)

۶۷. دو خط راست a و a_2، دو نقطهٔ A و A_2 واقع بر آن‌ها و نقطهٔ P در بیرون آن‌ها مفروض‌اند. از نقطهٔ P خط راستی بگذرانید که خط راست مفروض را به‌ترتیب در نقطه‌های X و X_2 قطع کند و داشته باشیم: $\overline{AX}+\overline{A_2X_2}=s$، که در آن، s پاره خط مفروضی است. (اگر روی a پاره‌خط $AB=s$ را جدا کنیم، باید داشته باشیم: $\overline{A_2X_2}=\overline{XB}$ ، به‌نحوی



شکل ۲۹

که مساله ما منجر بـه‌مسالهٔ ۶۶ مـی‌شود،) [مسالهٔ ۶۸ را، به دلیل نادرست بودن آن حذف کرده‌ایم.]

پترسن درکتاب معروف خود مساله‌هـای زیبای بسیاری آورده است که با روش دوران حل می‌شوند. او در ضمن از دوگزارهٔ زیر استفاده کرده است:

a) اگر یك چند ضلعی (که همیشه متشابه با خودش باقی مـی‌ماند) طوری حـرکت‌کند کـه سه رأس آن، خط‌های راستی را کـه از یك نقطه نمی‌گذرند، طی‌کنند، آن‌وقت هر یك از رأس‌های دیگـر هم روی یك خط راست حرکت خواهند کرد.

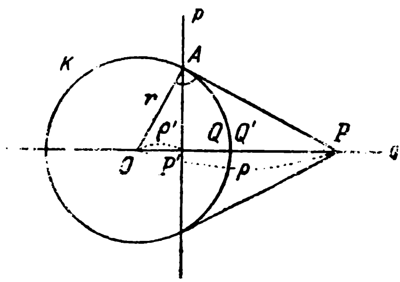
b) اگریك چندضلعی (که همیشه متشابه باخودش باقی‌می‌ماند) طوری حرکت‌کندکه سه‌ضلع آن دور نقطه‌های ثابتی‌که بریك خط‌راست‌واقع نیستند، دوران‌کنند، آن وقت همهٔ ضلع‌های چندضلعی دور نقطه‌هـای ثابتی دوران خواهندکرد.

§۶. روش انعکاس

یکی از سودمندترین روش‌ها برای حل مساله‌های ساختمانی هندسه، به‌خصوص مساله‌هایی که به دایره مربوط می‌شوند، روش ۱ انعکاس یا روش شعاع‌های وارون است. با این روش می‌توان شکل‌های بغرنجی را که‌شامل دایره‌ها هستند، به‌شکل‌های بسیار ساده‌تری تبدیل کرد.

۱. قبل از هر چیز باید با خود مفهوم انعکاس آشنا شویم.

نقطهٔ P و دایرهٔ K به شعاع r را در نظر بگیرید (شکل ۳۰). اگر



شکل ۳۰

خط راستی که نقطهٔ P را به مرکز وصل می‌کند، ادامه دهیم تا p، قطبی[۴۳] نقطهٔ P را قطع کند، نقطهٔ P' به‌دست می‌آید که‌آن را منعکس نقطهٔ P نسبت به‌دایرهٔ K گویند.

از مثلث قائم‌الزاویهٔ OAP نتیجه می‌شود:

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$$

بنابراین، اگر فرض کنیم: $r = 1$، $OP = \rho$، $OP' = \rho'$، به دست می‌آید:

$$\rho' = \frac{1}{\rho}$$

به همین دلیل است که انعکاس را نگاشت با شعاع‌های وارون هم می‌نامند.

دایرهٔ K را دایرهٔ اصلی انعکاس یا به‌طور ساده دایرهٔ انعکاس و نقطهٔ O را مرکز انعکاس و r^2 را درجهٔ انعکاس گویند.

۲. اگر نقطهٔ P در طول خط راست g حرکت کند، نقطهٔ P' هم در طول همین خط راست حرکت خواهد کرد؛ اگر نقطهٔ P از مرکز دور شود، نقطهٔ P' به‌مرکز O نزدیك می‌شود؛ نقطهٔ بی‌نهایت خط راست g، متناظر است بـا خود نقطهٔ O. اگر P در طول خط راست به نقطهٔ O نزدیك شود، P' از O دور می‌شود؛ منعکس نقطهٔ Q از محیط دایره، نقطهٔ Q' می‌شود که بر Q منطبق است.

بین نقطه‌هـای P و P'، رابطهٔ معکوس وجـود دارد، یعنی اگر P بر P' منطبق شود، آن وقت P' به نقطهٔ P مـی‌رود؛ این رابطهٔ معکوس، ناشی از برابری زیر است:

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2 \quad ۴۴$$

به‌این ترتیب در انعکاس، بخشی ازصفحه که در بیرون دایره قراردارد، به‌بخش داخلـی دایره تبدیل می‌شود؛ منعکس همهٔ نقطه‌هـای بی‌نهایت دور صفحه، همان نقطهٔ O است.

وقتی که نقطهٔ P روی یك خط‌راست یا یك منحنی حرکت‌کند، نقطهٔ P' روی خطی حـرکت می‌کند کـه آن را تصویر معکوس یا منعکس خط اول گویند. در حالت خاص، خط راست g متناظر با خودش است (شکل ۳۰)، یعنی برمنعکس خود g'، منطبق‌است. به‌همین‌ترتیب، دایرهٔ K هم، درانعکاس، متناظر بـا خودش است، یعنی در واقع، منعکس هر نقطه از دایرهٔ K، همان نقطه است.

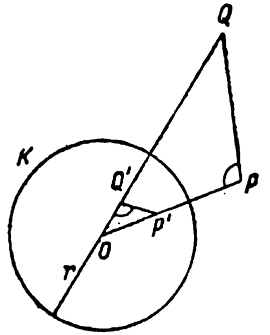
۳. برای طرح مطالب بعدی، یادآوری چند قضیه لازم است.

a) اگر (شکل ۳۱) نقطه‌هـای P' و Q' منعکس نقطه‌هـای P و Q نسبت به‌دایرهٔ K باشند، دو مثلث OPQ و $OQ'P'$ متشابه می‌شوند، زیرا

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OQ} \cdot \overline{OQ'}$$

و بنابراین

$$\overline{OP} : \overline{OQ} = \overline{OQ'} : \overline{OP'}$$



شکل ۳۱

در نتیجه، چهار نقطهٔ P، P'، Q، Q' بـر محیط دایره‌ای واقع اند[۴۵]، که دایرهٔ K را با زاویهٔ قائمه قطع می کند (c).

b. اگر نقطهٔ P در طـول خط راست g حـرکت کند، نقطهٔ P' محیط دایره‌ای را می‌پیماید که از O گذشته است.

اثبات. اگر OQ را عمود بر g، P را نقطهٔ دلخواهی از g و P' و Q' را منعکس‌های P و Q بگیریم، بنابر a) داریم:

$$\widehat{OP'Q'} = \widehat{OQP} = ۹۰^\circ$$

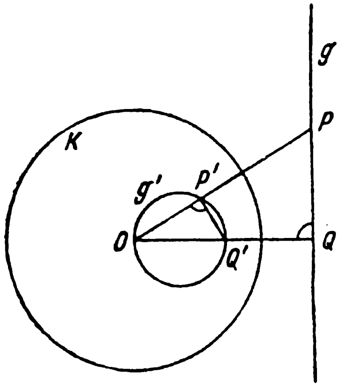
به‌این‌ترتیب، P' بر محیط دایره‌ای قرار دارد که به‌قطر پاره‌خط OQ' رسم شده باشد.

از روی شکل مـی‌توان روش رسم دایرهٔ g'، منعکس خط راست g را به‌روشنی فهمید.

c) اگر A و A'، B و B' واقع بر خط راستی کـه از O مـی گذرد، منعکس یکدیگر، و P و P' دو نقطهٔ دیگـر منعکس هم بـاشند (شکل ۳۳)، آن گاه دو مثلث APB و $A'P'B'$ متشابـه یکدیگر مـی‌شوند، زیرا از a) نتیجه می‌شود:

$$\widehat{OA'P'} = \widehat{OPA}$$

و به‌همین‌ترتیب



شکل ۳۲

$$\widehat{OB'P'} = \widehat{OPB}$$

بنا بر این

$$\widehat{A'P'B'} = \widehat{APB}$$

(از نظر علامت مخالفت یکدیگرند).

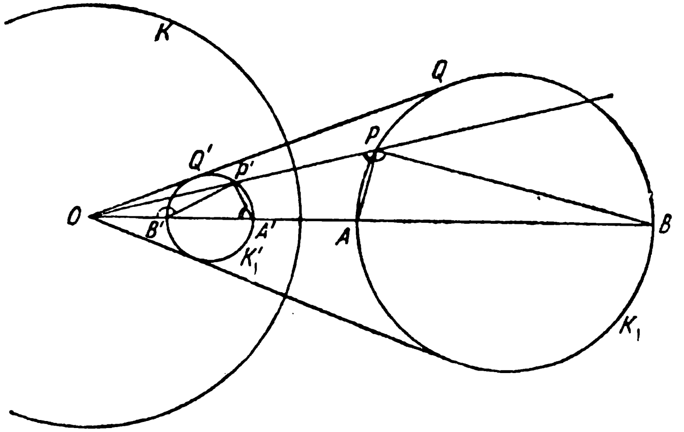
از اینجا نتیجه می‌شود: اگر نقطهٔ P روی محیط دایرهٔ K_1 به‌قطر AB حرکت کند، نقطهٔ P' دایرهٔ K'_1 به‌قطر $A'B'$ را خواهد پیمود.

به‌این‌ترتیب، یك دایره در انعکاس خود به‌دایرهٔ دیگری تبدیل می‌شود؛ دو دایره طوری قرار گرفته‌اند که نقطهٔ O، مرکز تشابه خارجی آن‌هاست.

وقتی که دایرهٔ K_1 مفروض باشد، دایرهٔ K'_1 را به‌این ترتیب می‌توان رسم کرد: نقطهٔ Q'، منعکس نقطهٔ Q را پیدا می‌کنیم و، به‌کمك آن، مرکز دایرهٔ K'_1 را به‌دست‌می‌آوریم (مرکزهای دودایره، نقطه‌های منعکس‌یکدیگر نیستند).

d) از شکل ۳۳، گزارهٔ مهم دیگری هم می‌توان نتیجه گرفت: اگر APB را مثلث بی‌نهایت‌کوچکی در نظر بگیریم، می‌توان منعکس آن را منطبق بر مثلث $A'P'B'$ به‌حساب‌آورد، که با مثلث APB متشابه است، زیرا

$$\hat{P'} = \hat{P}, \quad \hat{B'} = \hat{B}$$



شکل ۳۳

از اینجا نتیجه می‌شود: اگر دو منحنی C_1 و C_2، یکدیگر را به‌زاویهٔ α قطع کرده باشند، منعکس‌های آن‌ها، منحنی‌های C'_1 و C'_2 هم یکدیگر را به‌زاویهٔ α قطع می‌کنند[۴۶]. درحالت خاص، اگر دو منحنی برهم مماس باشند، منحنی‌های منعکس آن‌ها هم بریکدیگر مماس خواهند بود.

به‌این ترتیب، منعکس هر شکل در بخش‌های کوچك خود با بخش‌های متناظر شکل اصلی متشابه است: انعکاس حافظ زاویه‌هاست.

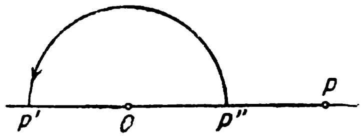
۴. نگاشت دیگری هم وجود دارد که خویشاوند نزدیك نگاشت مذکور در فوق (انعکاس) است و ما در اینجا به‌شرح آن می‌پردازیم.

O را نقطه‌ای ثابت، r را پاره خطی مفروض و P را نقطهٔ دلخواهی از صفحه می‌گیریم (شکل ۳۴). OP را رسم می‌کنیم، آن را از طرف O امتداد می‌دهیم و روی آن نقطهٔ P' را طوری در نظر می‌گیریم که داشته باشیم:

$$\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=-r^2$$

اگر متناظر هر نقطه از صفحه را، با این روش، پیدا کنیم، تمامی صفحه بر خودش نگاشته می‌شود.

اکنون اگر نقطهٔ P'' را با روش قبل بسازیم، یعنی به‌نحوی که داشته باشیم:



شکل ۳۴

$$\overline{OP}\cdot\overline{OP''}=r^{۲}$$

روشن می‌شود که P' را می‌توان با دوران P'' به‌اندازهٔ ۱۸۰ درجه به‌دست آورد.

بنا براین، اگر F و F'' دو شکل معکوس هم، در انعکاسی به مرکز O و درجهٔ $r^{۲}$، باشند و اگر شکل F'' را بـه‌اندازهٔ ۱۸۰ درجه دور O دوران دهیم، به‌شکل F' می‌رسیم که بازهم، در انعکاسی به‌مرکز O ودرجهٔ $-r^{۲}$، منعکس شکل F است.

شعاع‌دایرهٔ اصلی، برای انعکاس با درجهٔ $-r^{۲}$، برابر $r\sqrt{-۱}$ یعنی موهومی است.

قضیه‌هایی راکه قبلاً دربارهٔ انعکاس ثابت‌کردیم، برای حالت درجهٔ منفی هم، درست‌اند:

خط راست منجر به دایره‌ای می‌شود که از مرکز انعکاس گذشته است؛ دایره منجر به‌دایره مـی‌شود و در ضمن در این حالت، نقطهٔ O، مرکز تشابه درونی آن‌هـاست؛ در این‌جـا هم، انعکاس ، نگاشتی همدیس یعنی حـافظ زاویه‌هاست و دو زاویهٔ منعکس یکدیگر، مثل سابق، علامت‌هایی مخالف هم دارند.

مساله‌هایی برای تمرین

۶۹. به جز دایـرهٔ اصلی K، خط راستی داده شده است. می‌خواهیم منعکس خط راست را، وقتی‌کـه بر دایره مماس است، آن‌را قطع می‌کند و یا از بیرون آن می‌گذرد پیدا‌کنیم.

دایرهٔ اصلی K و همچنین دایرهٔ $K_{۱}$ مفروض‌انـد. منعکس $K_{۱}$ را در حالت‌های زیر پیدا کنید:

$K_{۱}$ از مرکز K می‌گذرد؛ $K_{۱}$ از بیرون و یا از درون بر K مماس

است، K_1 دایرهٔ K را تحت زاویهٔ حاده یا قائمه قطع می‌کند؛ مرکز دایرهٔ K_1 در بیرون یا در درون دایرهٔ K قرار دارد.

۷۰. مجموعه‌ای از دایره‌ها که دارای یك، و تنها یك محور اصلی باشند[۴۷]، دسته دایره نامیده می‌شوند.

a) اگر دو دایره از این دایره‌ها یکدیگر را قطع کرده باشند، نقطه‌های برخورد آن‌ها روی محور اصلی مشترك آن‌ها قرار دارند و، درضمن، متعلق به همهٔ دایره‌های دسته‌اند. در این حالت، دسته دارای دو نقطهٔ اصلی حقیقی است و شامل مجموعهٔ همهٔ دائره‌هایی است که از این دو نقطه می‌گذرند (دسته دایرهٔ الیپتیك).

b) ممکن است هیچ دو دایره‌ای از دسته، در نقطه‌های حقیقی یکدیگر را قطع نکرده باشند (دسته دایرهٔ هیپربولیك).

اگر K_1 و K_2 دو دایره از دسته باشند، به‌سادگی می‌توان به‌کمك آن‌ها، بقیهٔ دایره‌های دسته را رسم کرد.

اگر P را نقطهٔ برخورد محور اصلی آن‌ها با خط‌المرکزین فرض کنیم، آن وقت روشن است که نقطهٔ P از دو دایره به‌یك قوت است (p^2). بنابراین، باید طول مماس‌هایی که از نقطهٔ P بر همهٔ دایره دسته‌رسم می‌کنیم، با هم برابر باشند (p). به‌این ترتیب، نقطه‌های تماس همهٔ این مماس‌ها بر دایرهٔ K قرار دارند که مرکز آن P و برهمهٔ دایره‌های دسته عمود است.

اگر بخواهیم دایرهٔ K_3، یعنی دایرهٔ دیگری از دسته، را رسم کنیم، از نقطهٔ دلخواه E واقع بر محیط دایرهٔ K مماسی برآن رسم می‌کنیم تا خط‌المرکزین را در نقطهٔ O_3 قطع کند. دایرهٔ به مرکز O_3 و شعاع O_3E متعلق به‌دسته است، زیرا درنقطهٔ P قوتی برابر p^2 دارد[۴۸].

از ساختمان، این رابطه هم نتیجه می‌شود:

$$r^2 = d^2 - p^2$$

که در آن، r شعاع دایرهٔ O_3، d فاصلهٔ مرکز آن از P و p^2 قوت ثابت نقطهٔ P است.

اگر $d = p$ بگیریم، به دست می‌آید $r = a$، یعنی در این دستهٔ

هیپربولیك، دو نقطه هم وجـود دارد (دایره‌هایی‌که به نقطه تبدیل شده‌اند؛ نقطه‌های دایره‌ای) . این نقطه‌ها در محل برخورد خط‌المرکزین با دایرهٔ K قرار دارند.

c) اگر p محور اصلی مشترك دسته و Q نقطه‌ای ازاین محور بـاشد، آن وقت این نقطه نسبت بـه همهٔ دایره‌هـای دسته، قوتی برابر q^{2} دارد و، بنابراین، مماس‌هایی کـه ازآن بـر دایره‌های دسته رسم شوند، طول‌هایی برابر دارند.

اگر دایره‌ای به‌مرکز Q و به‌شعاع q (طول هر یك از این مماس‌ها) رسم‌کنیم، بـر همهٔ دایره‌هـای دسته عمود خواهد بـود (یعنی همهٔ آن‌ها را تحت زاویهٔ قائمه قطع می‌کند).

به این ترتیب، به مـرکز هریك از نقطه‌های محور اصلـی، می‌توان دایره‌ای رسم‌کردکه بر همهٔ دایره‌های دسته عمود باشد.

d) مجموعهٔ این دایره‌های عمود، دستهٔ جدیدی را تشکیل می‌دهند که محور اصلی مشترك آن‌ها، خط‌المرکزین دسته دایره‌های مفروض است.

اثبات. هر دایرهٔ K_{1} از دستهٔ اول (دستهٔ مفروض) همهٔ دایره‌های‌دستهٔ دوم را قطع می‌کند و برآن‌ها عمود است. بنابراین، مماس‌های بردایره‌های دستهٔ دوم در این نقطه‌های بـرخورد، ازمـرکز O_{1} دایرهٔ K_{1} مـی‌گذرند. بنابراین، هـر نقطهٔ دلخواه O_{1} از خط‌المرکـزین دستهٔ اول، نسبت به همهٔ دایره‌های دستهٔ دوم، به‌یك قوت است.

e) اگر دستهٔ اول دارای نقطه‌های اصلی حقیقی باشد، دستهٔ عمود بر آن، دارای چنین نقطه‌هایی نیست. نقطه‌های گرهی دستهٔ اول (کـه در همهٔ دایره‌ها مشترك‌اند)، همان نقطه‌های دایره‌ای دسته دایره‌های عمود را تشکیل می‌دهند.

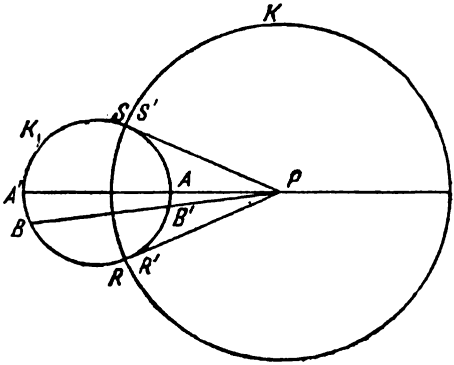
اگر دستهٔ‌اول، نقطه‌های اصلی حقیقی نداشته باشد، در دستهٔ دوم چنین نقطه‌هایی وجود داردکه همان نقطه‌های دایره‌ای دستهٔ اول‌اند.

f) اگر شکلی را رسم کنیم‌که منعکس دایره‌های هم‌مرکز و قطرهای آن‌ها باشد، دو دسته دایرهٔ عمود برهم به‌دست می‌آید.[۴۹]

۰۷۱ دایرهٔ K_{1} و نقطهٔ P در خارج آن داده شده است.

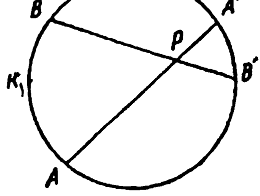
اگر از P مماسی بر K_1 رسم کنیم و دایرهٔ K را به‌مرکز P و به‌شعاع همین مماس بکشیم، آن وقت دایرهٔ K_1، نسبت به دایرهٔ K، منعکس خودش می‌شود. این حکم را ثابت کنید.[50]

دایره‌های K و K_1 بر هم عمودند. نقطه‌های متناظر A و A'، B و B'، ... (شکل ۳۵) از دایرهٔ K_1، منعکس یکدیگرند. درجهٔ این انعکاس برابر است با قوت نقطهٔ P نسبت به‌دایرهٔ K_1.



شکل ۳۵

در حالتی که P داخل K_1 باشد (شکل ۳۶)، می‌توان انعکاس را به‌مرکز نقطهٔ P تشکیل داد؛ درضمن، دایرهٔ K_1 منعکس خودش خواهد بود. درجهٔ انعکاس، باز هم برابر است با قوت نقطهٔ P نسبت به دایرهٔ K_1 و، بنابراین، مقداری منفی است.

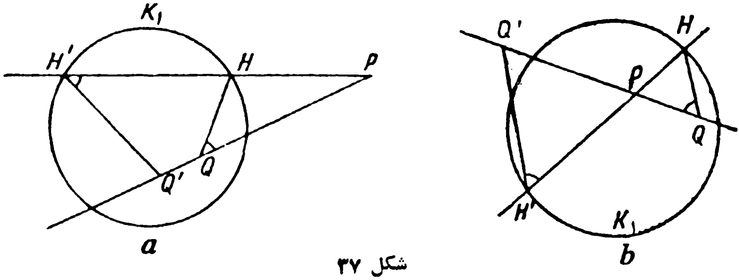


شکل ۳۶

دایرهٔ انعکاس K، موهومی است.[51]

۷۲. دایرهٔ K_1 و نقطهٔ P واقع در بیرون یا درون K_1 داده شده است

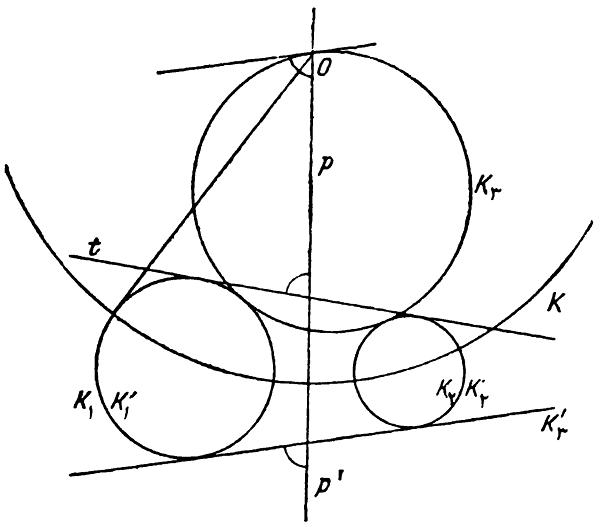
(شکل ۳۷ـa و b). می‌خواهیم برای نقطه‌ای مثل Q، نقطهٔ Q' را طوری پیدا کنیم که منعکس آن در انعکاسی باشد که نقطهٔ P مرکز آن و دایرهٔ K_1 منعکس خودش است (۳ . a را ببینید).



شکل ۳۷

۷۳. دو دایرهٔ K_1 و K_2 که در نقطهٔ A بـر هم مماس‌اند، داده شده است. نقطهٔ A را مرکز انعکاس بگیرید و شکل‌هایی را رسم کنید که منعکس دایره‌های K_1 و K_2 باشند. وضع این شکل‌ها نسبت به هم چگونه است؟[۵۲]

۷۴. K_1 و K_2 دو دایرهٔ مفروض، p محور اصلی آن‌ها، K_3دایره‌ای مماس بر دو دایرهٔ K_1 و K_2، و t مماس مشترك دایــره‌های K_1 و K_2 است (شکل ۳۸).



شکل ۳۸

در این صورت، دایرهٔ K_3، محور اصلی p را تحت همان زاویه‌ای قطع می‌کند که خط راست t آن را قطع می‌کند. از این حکم می‌توان برای حل مسالهٔ آپولونیوس دربارهٔ مماس‌ها استفاده کرد.

برای اثبات، از نقطهٔ O مماسی بر دایرهٔ K_1 (یا K_2) رسم می‌کنیم و این مماس را، شعاع دایرهٔ K به حساب می‌آوریم. انعکاس تمامی شکل را نسبت به دایرهٔ K در نظر می‌گیریم؛ در این انعکاس K_1، K_2 و p به‌خودشان و K_3 به مماس مشترک K'_3 تبدیل می‌شوند. نگاشت، زاویه‌ها را حفظ می‌کند.

۷۵. دایرهٔ K و نقطه‌های A و B مفروض‌اند. می‌خواهیم دایره‌ای رسم کنیم که از نقطه‌های A و B بگذرد و بر دایرهٔ K مماس باشد.

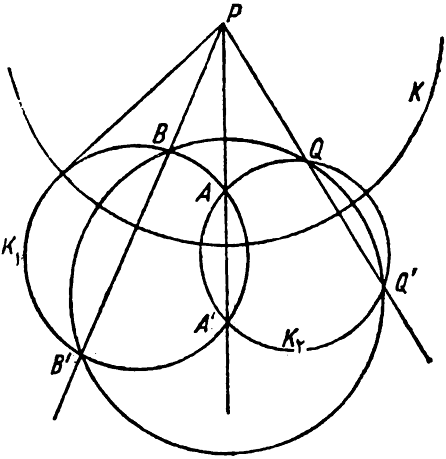
(مرکز انعکاس نقطهٔ دلخواهی از دایره و، اگر ممکن باشد، یکی از دو نقطهٔ برخورد عمود منصف پاره خط AB با دایرهٔ K است.)

۷۶. سه دایرهٔ K_1، K_2 و K_3، که در نقطهٔ S مشترک‌اند، داده شده است. می‌خواهیم دایره‌ای رسم کنیم که بر این سه دایره مماس باشد. (نقطهٔ S را مرکز انعکاس بگیرید.)

۷۷. دایرهٔ K_1 و نقطه‌های P و Q مفروض‌اند (شکل ۳۹). از نقطهٔ P خط راست دلخواهی رسم کرده‌ایم که دایرهٔ K_1 را در نقطه‌های A و A' قطع کند، سپس دایرهٔ K_2 را از نقطه‌های A، A' و Q گذرانده‌ایم. اگر قاطع AP را تغییر دهیم، دایره‌های تازه‌ای از K_2 به‌دست می‌آید که، علاوه بر نقطهٔ Q، از نقطهٔ ثابت Q' هم می‌گذرند و، بنابراین، یک دسته دایره تشکیل می‌دهند. (مماس‌هایی که از نقطهٔ P بر دایره‌های K_1 و K_2 رسم می‌کنیم، طول‌هایی برابر دارند. اگر دایره‌ای به مرکز P و به شعاع برابر همین مماس‌ها رسم کنیم و آن را به‌عنوان دایرهٔ انعکاس در نظر بگیریم، آن وقت K_1 و همهٔ دایره‌های K_2، به خودشان تبدیل می‌شوند. بنابراین، دایرهٔ K_2 باید از نقطهٔ Q' هم، که منعکس نقطهٔ Q است، بگذرد.)

۷۸. دایرهٔ K_1 و دو نقطهٔ Q و Q' مفروض‌اند. می‌خواهیم دایره‌ای رسم کنیم که از نقطه‌های Q و Q' بگذرد و بر دایرهٔ K_1 مماس باشد (۷۷).

۷۹. دو دایرهٔ K_1 و K_2 مفروض‌اند. می‌خواهیم دایرهٔ K را طوری



شکل ۳۹

رسم کنیم که دو دایرهٔ مفروض، نسبت به آن، منعکس یکدیگر باشند (درجهٔ انعکاس را مثبت بگیرید).

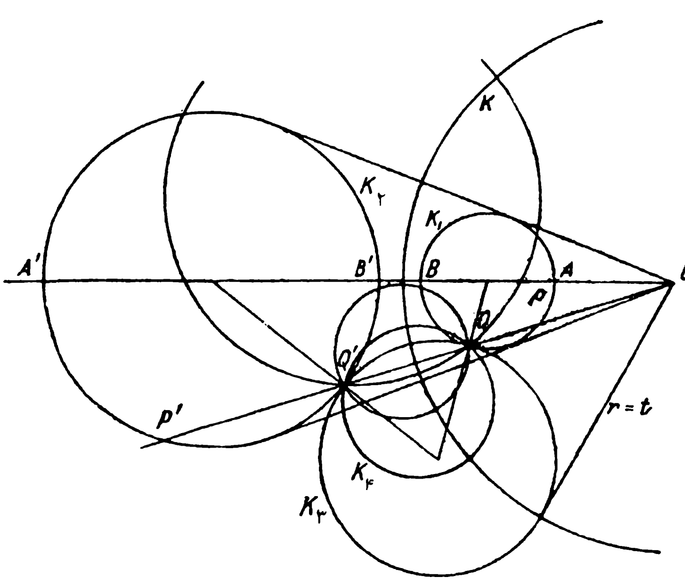
نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ K باید بر مرکز بیرونی تشابه دایره‌های K_1 و K_2 منطبق باشد (شکل ۴۰)؛ شعاع r دایـرهٔ K از برابری زیـر به دست می‌آید:

$$r^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}$$

از آن جا که دو دایره باید منعکس یکدیگر باشند، به دست می‌آید:

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OQ} \cdot \overline{OQ'} = r^2$$

با توجه به مفهوم انعکاس، بلافاصله نتیجه می‌شود که، دایرهٔ K_3 کـه بر دایرهٔ K_1 در نقطهٔ Q مماس است و از نقطهٔ Q' می گذرد، باید بر دایـرهٔ K_2 در نقطهٔ Q' مماس باشد. درواقع، با توجه به انعکاس، این دایره ، متناظر با خودش است و، بنابراین، دایـرهٔ انعکاس را در زاویهٔ قائمه قطع می کند (با ۷۱ مقایسه کنید). از آن جا، نتیجهٔ زیـر کـه اغلب مورد استفاده دارد، به دست می آید: اگر دایره‌ای بر دو دایرهٔ مفروض مماس باشد، خط راستی که نقطه‌های تماس را به هم وصل می‌کند، از مرکز تشابه دایره‌ها می‌گذرد؛



شکل ۴۰

درضمن، اگر مماس برای دو دایره از یك نوع باشد، مرکز تشابه خارجی و اگر مماس از یك نوع نباشد، مرکز تشابه داخلی است.

بنابراین، قوت مرکز تشابه بیرونی نسبت به همهٔ دایره‌های مماس یك نوع K_3، مقداری ثابت و برابر است با

$$r^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = \overline{OP} \cdot \overline{OP'}$$

اگر به‌جای مرکز تشابه بیرونی، مرکز تشابه درونی را به‌عنوان مرکز انعکاس انتخاب کنیم، چه تغییری در مسأله به وجود می‌آید؟ (در این حالت، دایرهٔ K موهومی است.)

۸۵. اگر دایرهٔ K_3 را از دو نقطهٔ Q و Q' شکل ۴۰، که منعکس یکدیگرند، بگذرانیم، نسبت به دایرهٔ K، منعکس خودش خواهد بود و، بنابراین، K را در زاویهٔ قائمه و دو دایرهٔ K_1 و K_2 را در زاویه‌های برابر، قطع می‌کند. K_3 را، دایرهٔ هم‌زاویه، نسبت به‌دو دایرهٔ K_1 و K_2 گویند.

هر دایره‌ای که بر دایرهٔ K عمود باشد، برای K_1 و K_2، دایره‌ای

هم زاویه است، زیرا در انعکاس، به خودش تبدیل می‌شود.

اکنون فرض می‌کنیم سه دایرهٔ M_1، M_2 و M_3 داده شده باشد؛ $A_{1,2}$ را یکی از مرکزهای تشابه دایره‌های M_1 و M_2، و $K_{1,2}$ را دایره‌ای که دو دایرهٔ M_1 و M_2 نسبت به آن، در انعکاس به مرکز $A_{1,2}$ منعکس یکدیگرند، می‌گیریم؛ $A_{1,3}$ و $M_{1,3}$ را هم، در ارتباط با دایره‌های M_1 و M_3، به همین معنا می‌گیریم.

همهٔ دایره‌هایی که بر دایرهٔ $K_{1,2}$ ($K_{1,3}$) عمود باشند، بنا بر مسألهٔ ۸۰، دایره‌های M_1 و M_2 (M_1 و M_3) را در زاویه‌های برابر قطع می‌کنند. بنا براین، همهٔ دایره‌هایی که مشترکاً بر هر دو دایرهٔ $K_{1,2}$ و $K_{1,3}$ عمودند، سه دایرهٔ مفروض را تحت زاویه‌های برابر قطع می‌کنند.

مجموعهٔ دایره‌های عمود بر دو دایرهٔ مفروض، دسته‌ای را تشکیل می‌دهند (۷۰) که محور اصلی آن، خط‌المرکزین این دو دایره است.

مجموعهٔ همهٔ دایره‌هایی که از این راه به دست می‌آیند و نسبت به دایره‌های M_1، M_2 و M_3 هم زاویه‌اند، تشکیل دسته دایره‌ای را می‌دهند که محور اصلی آن‌ها، محور تشابه a است.[۵۳]

می‌توان از محور تشابه دیگری برای سه دایره آغاز کرد؛ دوباره دسته دایره‌های هم زاویه‌ای به دست می‌آید که این محور تشابه، محور اصلی آن است.

به این ترتیب، به قضیهٔ زیر می‌رسیم:

مجموعهٔ همهٔ دایره‌های هم زاویه با سه دایرهٔ مفروض، چهار دسته تشکیل می‌دهند که محور اصلی هر کدام از آن‌ها، یکی از محورهای تشابه است.

هر دایره‌ای که بر سه دایرهٔ M_1، M_2 و M_3 مماس باشد، متناظر است با دایرهٔ دیگری که بر همین سه دایرهٔ M_1، M_2 و M_3 مماس است و با دایرهٔ اول به یك دسته تعلق دارد.

اگر Z را مرکز اصلی سه دایره بگیریم و فرض کنیم، دایرهٔ K، هر سه دایره را تحت زاویهٔ قائمه قطع کند، آن وقت K دایره‌ای است به مرکز Z وشعاع برابرهریك ازمماس‌هایی که می‌توان از Z بر سه دایره رسم کرد.

اکنون اگر دایرهٔ K را به عنوان دایرهٔ انعکاس انتخاب کنیم، آن وقت، هر یك از دایره‌های $M_۱$، $M_۲$ و $M_۳$ (به دلیل این که بر K عمودند) به خودشان، و هر دایرهٔ هم زاویه با سه دایرهٔ مفروض، به دایره‌ای هم زاویه با همان دسته تبدیل می‌شوند. درحالت خاص، هر دایرهٔ مماس بر سه دایرهٔ مفروض، به‌دایرهٔ دیگری تبدیل می‌شودکه بازهم بر این سه دایره مماس‌است.

ولی نقطهٔ Z برای دو دایره‌ای که نسبت به K منعکس یکدیگر باشند، مرکز تشابه است و خود دو دایره یکدیگر را روی محیط دایرهٔ K قطع می‌کنند.[۵۴] بنا براین

a) نقطه‌های اصلی چهار دسته دایره‌های هم زاویه بر K قرار دارند؛ بنابراین دایرهٔ K، به هر چهار دسته دایره‌های هم زاویه تعلق دارد.

بنا براین، نقطه‌های اصلی عبارتند ازنقطه‌های برخورد محور تشابه با دایرهٔ K.

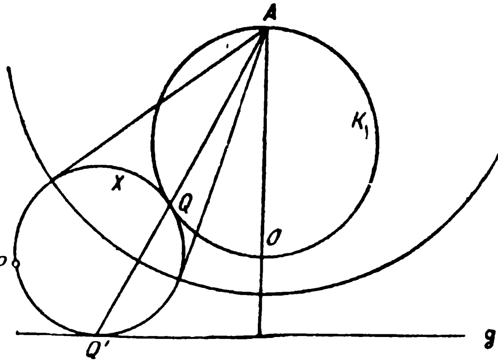
b) دایره‌های مماس این دسته‌ها، K را در همین نقطه‌های اصلی قطع می‌کنند و نقطهٔ Z، مرکز تشابه آن‌هاست.

این یادآوری‌ها، برای حل‌مسالهٔ آپولونیوس دربارهٔ مماس‌هامی‌تواند مفید باشد.

۸۱. نقطهٔ P و دو دایرهٔ $K_۱$ و $K_۲$ مفروض‌اند. می‌خواهیم دایره‌ای رسم کنیم که از نقطهٔ P بگذرد و بر دو دایرهٔ مفروض مماس باشد. (مرکز تشابه دایره‌های $K_۱$ و $K_۲$ را مرکز انعکاس بگیرید و شعاع دایرهٔ انعکاس‌را پیدا کنید، یعنی دایره‌ای که دو دایرهٔ $K_۱$ و $K_۲$، نسبت به آن، منعکس یکدیگرند.

دایرهٔ مجهول، در این انعکاس به خودش تبدیل می‌شود و، بنا براین، باید ازنقطهٔ P منعکس نقطهٔ P' بگذرد. به این ترتیب، مسالهٔ ما به مسالهٔ **۷۸** منجر می‌شود؛ ابتدا مرکز تشابه خارجی و سپس، مرکز تشابه داخلی را، به عنوان مرکز انعکاس انتخاب کنید.)

۸۲. خط راست g، دایرهٔ $K_۱$ ونقطهٔ P مفروض‌اند. می‌خواهیم‌دایرهٔ X را طوری رسم کنیم که بر g و $K_۱$ مماس باشد و از P عبور کند (شکل ۴۱).



شکل ۴۱

(نقطهٔ A (یا J) را مرکز انعکاس بگیرید، سپس دایرهٔ اصلی انعکاس را طوری پیدا کنید که دایرهٔ K_1 و خط راست g منعکس یکدیگر باشند؛ برای نقطهٔ J، این دایره موهومی است. قوت نقطهٔ A و J نسبت به دایرهٔ مجهول را می‌توان، مستقیماً، از روی شکل به دست آورد.)

۸۳. دایرهٔ K و n دایرهٔ انعکاس $O_1(r_1)$، $O_2(r_2)$، $O_3(r_3)$، ...، $O_n(r_n)$ را در نظر می‌گیریم. دایرهٔ K_1 را منعکس دایرهٔ K نسبت به $O_1(r_1)$، دایرهٔ K_2 را منعکس دایرهٔ K_1 نسبت به $O_2(r_2)$: دایرهٔ K_3 را منعکس دایرهٔ K_2 نسبت به $O_3(r_3)$، . . . و سرانجام، دایرهٔ K_n را منعکس دایرهٔ K_{n-1} نسبت به $O_n(r_n)$ فرض می‌کنیم.

دایرهٔ K_n می‌تواند بر دایرهٔ K منطبق شود؛ در چنین صورتی، دایرهٔ $O_n(r_n)$ باید همان دایره‌ای باشد که K_{n-1} و K نسبت به آن، منعکس یکدیگر بشوند. و ما فرض می‌کنیم که دایرهٔ $O_n(r_n)$ را به‌همین ترتیب، انتخاب کرده باشیم.

اکنون اگر نقطهٔ دلخواه A را بر محیط دایرهٔ K در نظر بگیریم، آن وقت، به‌کمك انعکاس‌های متوالی، نقطهٔ A_1 بر دایرهٔ K_1، A_2 بر K_2؛...، و بالاخره A_n بر K_n به دست می‌آید که، در حالت کلی، برنقطهٔ انتخابی A از K، منطبق نیست. اکنون، این مساله را طرح می‌کنیم:

نقطهٔ A را بر دایرهٔ K طوری پیدا کنید که بر نقطهٔ A_n منطبق شود.

نقطهٔ مجهول را X می‌نامیم. در این جا، نقش اصلی به عهدهٔ دو نقطه است:

اگر منعکس نقطهٔ O_1 را به ازای انعکاس دوم $O_2(r_2)$ بسازیم، سپس، منعکس نقطهٔ اخیر را (که ضمن انعکاس به‌دست می‌آوریم) به ازای انعکاس سوم $O_3(r_3)$ پیدا کنیم و غیره، بعد از $(n-1)$ انعکاس متوالی نسبت به‌مرکزهای O_2، . . .، O_n، نقطه‌ای مثل H_1 به دست می‌آید.

اکنون اگر منعکس نقطهٔ O_n را در انعکاس $O_{n-1}(r_{n-1})$، سپس منعکس نقطهٔ اخیر را در انعکاس $O_{n-2}(r_{n-2})$ و غیره بـه دست آوریم، سرانجام، بعد از $(n-1)$ انعکاس متوالی به‌نقطه‌ای مثل H_n می‌رسیم.

هر خط راست a کـه از نقطهٔ H_n بگذرد، بعد از n انعکاس متوالی نسبت به مرکزهای O_1، O_2، . . .، O_n، به خط راستی مثل a' منجر می‌شود که از نقطهٔ H_1 گذشته است.

اثبات. انعکاس اول، خط‌راست a را به‌دایره‌ای مثل a_1 تبدیل می‌کند که از نقطهٔ O_1 می‌گذرد. ایـن دایره، ضمن انعکاس دوم، بـه دایرهٔ دیگری تبدیل می‌شود و غیره. بالاخره، بعد از $(n-1)$ انعکاس بـایـد به دایره‌ای برسیم که از O_n گذشته است، زیرا نقطهٔ H_n، که بر خط راست a قرار دارد، بعد از $(n-1)$ انعکاس متوالی، به‌نقطهٔ O_n می‌رسد. آخرین انعکاس، که نسبت به O_n انجام می‌گیرد، دایرهٔ مذکور را به خط راستی مثل a' تبدیل می‌کند.

درضمن، به‌کمك انعکاس اول نسبت بـه مـرکـز O_1، خط راست a به دایره‌ای مثل a_1 منجر می‌شود که باید از O_1 گذشته باشد؛ به این ترتیب، دایرهٔ O_1 به‌کمك انعکاس‌های متوالی نسبت به مرکزهای O_2، O_3، . . .، O_n، بازهم بـه خط راست a' منجر می‌شود. ولی از آن جا که دایرهٔ a_1 از O_1 گذشته است، خط راست a' باید از نقطهٔ H_1 بگذرد.

بنابراین، بعد از n انعکاس نسبت بـه مرکزهای O_1، . . .، O_n، دستهٔ نیم‌خط‌هایی که از نقطهٔ H_n می‌گذرند، منجر به دستهٔ نیم خط‌هایی می‌شوند که از H_1 گذشته‌اند.

به‌کمك همین نقطه‌های H_1 و H_n می‌توان جواب مساله را پیدا کرد؛ ولی قبل از آن باید دو حالتی را که n زوج یا فرد باشد، ازهم جدا کرد.

مطلب بر سر این است که، در هر انعکاس، زاویهٔ α با زاویهٔ منعکس خود برابر می‌شود، ولی در جهت عکس آن قرار دارد. وقتی که زاویه‌ای را در n انعکاس متوالی وارد کنیم، قدرمطلق اندازهٔ آن تغییر نمی‌کند، ولی علامت آن، تنها وقتی بی‌تغییر می‌ماند که n، عددی زوج باشد. در حالتی که n عددی فرد باشد، علامت زاویه به عکس خود تبدیل می‌شود.

a) n، عددی است زوج.

اگر نقطهٔ مجهول X را به نقطهٔ H_n از دایرهٔ K وصل کنیم، بعد از n انعکاس، این خط راست به خط راست XH_1 منجر می‌شود. دو خط باید در نقطهٔ X، زاویه‌های برابر وهم علامت با دایره تشکیل دهند. و این، تنها وقتی ممکن است که X روی خط راست H_1H_n باشد.

بنابراین، مسالهٔ ما دو جواب دارد: نقطه‌های برخورد خط راست H_1H_n با دایرهٔ K.

b) n، عددی فرد است.

در این حالت، خط راست H_1H_n، منجر به خودش نمی‌شود.

اگر این خط راست را s بنامیم و به عنوان خط راستی که متعلق به دستهٔ H_1 است به حساب آوریم، بنابرآن چه قبلاً گفته‌ایم، منجر به خط راستی مثل s' از دستهٔ H_n می‌شود. همچنین اگر خط راست H_1H_n رامتعلق به دستهٔ H_n بگیریم و آن را σ بنامیم، در دستهٔ H_1 منجر به خط راست σ' می‌شود.

خط‌های راست H_1H_n، s' و σ' باید دایرهٔ K را با زاویه‌هایی برابر قطع کنند، بنابراین باید بر دایره‌ای هم مرکز با دایرهٔ K مماس باشند. سپس، دو خط راست s و σ' پاسخ‌گوی دو خط راست s' و σ هستند و، بنابراین، باید زاویه‌های بین σ' و σ و s' برابر باشند.

و این، تنها وقتی ممکن است که نقطه‌های H_1 و H_n از مرکز دایرهٔ K به یك فاصله باشند.

اکنون، اگر از نقطه‌های H_1، H_n و مرکز دایرهٔ K، دایرهٔ جدیدی بگذرانیم، دایرهٔ اخیر دایرهٔ K را در همان نقطهٔ مجهول X قطع می‌کند. در واقع، خط‌راستی که هر کدام ازاین نقطه‌های برخورد را به H_1 وصل می‌کند،

دایرهٔ K را با همان زاویه‌ای قطع می‌کند که خط راست واصل بین این نقطه و نقطهٔ H_n.

۸۴. دایرهٔ K و چهار نقطهٔ O_1، O_2، O_3 و O_4 مفروض‌اند، می‌خواهیم چهارضلعی $XYZO$ را در دایرهٔ K چنان محاط کنیم که ضلع‌های آن، XY، YZ، ZO و OX، به ترتیب از نقطه‌های O_1، O_2، O_3 و O_4 عبور کنند.

[به کمك انعکاسی نسبت به مرکز O_1، دایرهٔ K به‌خودش تبدیل می‌شود (مسالهٔ ۷۱)، سپس انعکاس نسبت به مرکز O_2، دوباره‌آن را به خودش تبدیل می‌کند؛ با انتخاب انعکاس‌های مناسبی نسبت به O_3 و O_4 هم به همین نتیجه می‌رسیم. به این ترتیب، دایرهٔ K، ضمن چهار انعکاس معین، منجر به خودش می‌شود. در نتیجه، نقطهٔ X (بنابر مسالهٔ ۸۳ ـ a) معین می‌شود.][۵۵]

۸۵. دایرهٔ K و سه نقطهٔ O_1، O_2 و O_3 مفروض‌اند. می‌خواهیم مثلثی در دایره محاط کنیم که ضلع‌های آن از نقطه‌های مفروض عبور کنند.

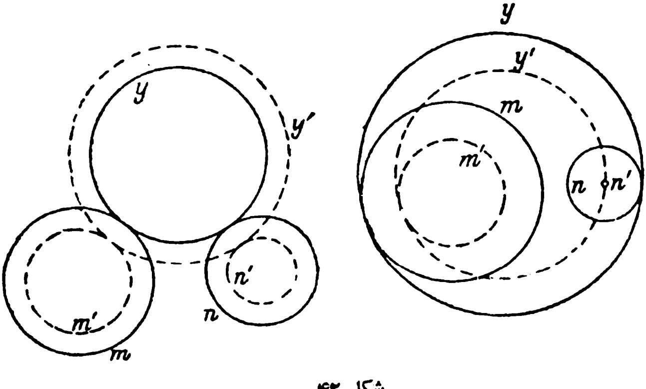
[منجر به‌مسالهٔ (۸۳ ـ b) می‌شود.]

۸۶. سه دایرهٔ K_1، K_2، و K_3 مفروض‌اند. می‌خواهیم دایره‌ای رسم کنیم‌که بر سه دایرهٔ مفروض مماس باشد (مسالهٔ آپولونیوس دربارهٔ مماس‌ها).

روش‌هایی که آورده‌ایم، امکان حل این مسالهٔ قدیمی را، از راه‌های مختلف به وجود می‌آورند. ما در این‌جا، بعضی از این راه‌ها را می‌آوریم.

a) همیشه می‌توان این مساله را، به حالت خاص زیر تبدیل کرد:

دو دایره و یك نقطه مفروض‌اند. می‌خواهیم دایره‌ای رسم کنیم که بر دو



شکل ۴۲

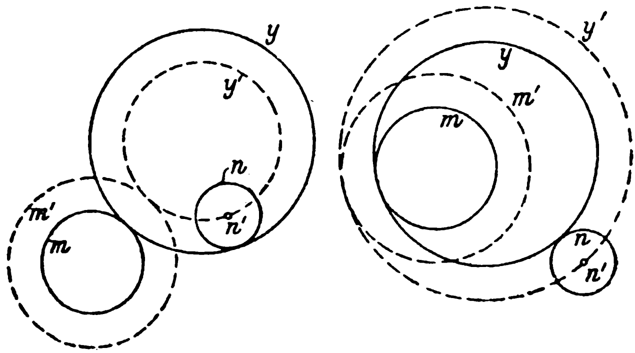
دایرهٔ مفروض مماس باشد و از نقطهٔ مفروض بگذرد.

این مساله چهار جواب دارد (۸۱).

برای این که مسالهٔ کلی را بـه این حالت خاص تبدیل کنیم، به این ترتیب عمل می کنیم.

دو دایره را m و n، و دایرهٔ مماس بر آن‌ها را y می‌نامیم (شکل‌های ۴۲ و ۴۳ ـ a و b).

می‌توانیم این سه دایره را به ایـن ترتیب تغییر دهیم که، مرکزهای آن‌ها ثابت بماند و دایـرهٔ y همواره بر دایره‌های m و n مماس باشد، در ضمن، تنها شعاع‌های دایره بزرگتر یا کوچکتر می‌شود.



شکل ۴۳

اگر y بر دو دایرهٔ m و n به صورتی یکسان مماس باشد، یعنی m و n هر دو در بیرون یا هر دو در درون y واقع باشند (شکل ۴۲ ـ a و b)، آن وقت، شعاع‌های دو دایره یا باهم بزرگ و یا باهم کوچک می‌شوند.

ولی اگر y بر دودایرهٔ m و n به صورتی یکسان مماس نباشد (شکل ۴۳ـ a و b)، آن وقت، شعاع یکی ازاین دایره‌ها بزرگ و شعاع دیگری کوچك می‌شود.

اکنون سه دایرهٔ K_1، و K_2 و K_3، به مـرکـزهای O_1، O_2 و O_3 و شعاع‌های r_1، r_2 و r_3 را در نظر می گیریم. دایره‌ای را که براین سه دایره مماس باشد، X می‌نامیم. دایرهٔ K_1 را می‌توان به نقطهٔ O_1 منجر کـرد ، در این صورت، شعاع‌های دو دایرهٔ دیگر بزرگتر یا کوچکتر می‌شوند. به این

ترتیب، به‌همان مساله ۸۱ می‌رسیم.

رسم را می‌توان به طریق زیر انجام داد.

دو دایرهٔ K'_2 و K''_2 را به شعاع‌های r_2+r_1 و r_2-r_1 به مرکز O_2 و همچنین، دو دایرهٔ K'_3 و K''_3 را به شعاع‌های r_3+r_1 و r_3-r_1 به‌مرکز O_3 رسم می‌کنیم. بعد دایره‌هایی را می‌سازیم که از نقطهٔ O_1 بگذرند و بر دو دایرهٔ K'_2 و K'_3 یا K''_2 و K''_3 به‌طور یکسان مماس باشند (یعنی دو دایرهٔ K'_2 و K'_3 یا K''_2 و K''_3 هر دو دربیرون یا هر دو در درون دایرهٔ اخیر قرار گیرند. که به این ترتیب، چهار جواب به‌دست می‌آید).

بعد دایره‌هایی را رسم می‌کنیم که از O_1 بگذرند و بر دایره‌های K'_2 و K''_3 یا K''_2 و K'_3 به صورت نایکسان مماس باشند (از دایره‌های K'_2 و K''_3 یا دایره‌های K''_2 و K'_2 یکی در داخل و دیگری درخارج دایرهٔ اخیر قرار دارند؛ چهارجواب).

هشت دایره‌ای که به این ترتیب به دست می‌آیند، با دایرهٔ مجهول هم‌مرکزند. بنابراین، مساله هشت جواب دارد.

b) مساله را حل شده می‌گیریم، بعد شعاع‌های دایره‌ها را بزرگتر یا کوچکتر می‌کنیم تا جایی که دو تا از آن‌ها، و مثلاً K'_1 و K'_2 در نقطهٔ Q برهم مماس می‌شوند (شکل ۴۴).

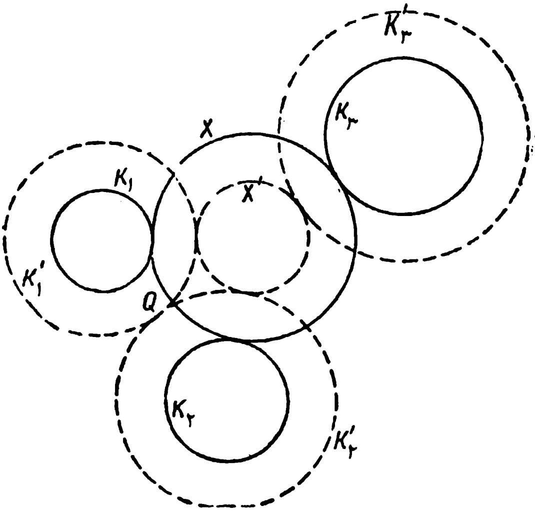
اکنون، اگر نقطهٔ Q را مرکز انعکاس بگیریم، دایره‌های K'_1 و K'_2 به دو خط راست موازی تبدیل می‌شوند و . . .

c) دایرهٔ K را عمود بر سه دایرهٔ مفروض رسم می‌کنیم.

اگر نقطهٔ O را روی محیط دایرهٔ K به عنوان مرکز انعکاس انتخاب کنیم، دایره‌های مفروض، به دایره‌هایی تبدیل می‌شوند که مرکزهای آن‌ها بر یك خط راست واقع‌اند. به‌کمك یك انعکاس دیگر، می‌توان به حالتی رسید که در شکل ۳ نشان داده شده است.[۵۶]

بهتر است مرکز انعکاس را در نقطهٔ برخورد دایرهٔ K با یکی از دایره‌های مفروض بگیریم.

اگردو تا ازدایره‌های مفروض متقاطع باشند، بهتر است مرکزانعکاس را در نقطهٔ برخوردآن‌ها بگیریم،که درآن صورت، این دایره‌ها، به‌خط‌های



شکل ۴۴

راست تبدیل می‌شوند.

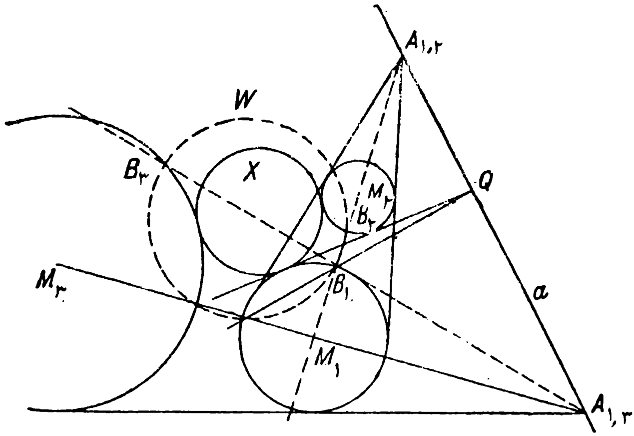
همچنین بهتر است، قبل از آن که از انعکاس استفاده کنیم، یکی از دایره‌ها را منجر به نقطه کنیم [به‌کمك روشی که در مسالهٔ (a – ۸۶) آوردیم].

d) از طرحی که در مسالهٔ ۸۰ دادیم، می‌توان مسالهٔ آپولونیوس دربارهٔ مماس‌ها را به ترتیب زیر حل کرد.

سه دایرهٔ M_1، M_2 و M_3 را مفروض می‌گیریم (شکل ۴۵).

ازمحور تشابه، ومثلاً از محور تشابه خارجی a آغاز و سپس، دایرهٔ هم زاویهٔ W را، متعلق به‌دسته‌ای ازدایره‌های‌هم زاویه‌که محوراصلی آن‌ها خط راست a است، رسم می‌کنیم.

برای این منظور، نقطهٔ B_1 را روی M_1 انتخاب و نقطهٔ B_2 را روی M_2، به عنوان منعکس B_1 نسبت به مرکز انعکاس $A_{1,2}$، پیدا می‌کنیم[57]؛ علاوه بر آن، نقطه B_3 را هم روی M_3، به عنوان منعکس B_1 نسبت به‌مرکز انعکاس $A_{1,3}$ به دست می‌آوریم.



شکل ۴۵

دایرهٔ W، که از سه نقطهٔ B_1، B_2 و B_3 می‌گذرد، دایره‌ای هم‌زاویه است (۸۰).

اکنون، اگر محور اصلی دایره‌های W و M_1 را رسم کنیم و نقطهٔ برخورد آن را با a، Q بنامیم، آن وقت، نقطهٔ Q از دو دایرهٔ W و M_1 به یك قوت خواهد بود؛ ولی از آن جا که Q بر خط راست a قرار دارد، نسبت به دایرهٔ مجهول X هم، همین قوت را خواهد داشت؛ دایرهٔ X به دسته دایره‌های هم زاویهٔ W تعلق دارد، زیرا a محور اصلی دایره‌های این دسته است. بنابراین، Q، نقطه‌ای از محور اصلی دایره‌های X و M_1 است.

چون دایره‌های X و M_1 باید برهم مماس باشند، محور اصلی آن‌ها بر مماس مشترکشان منطبق است و، در نتیجه، روش پیدا کردن نقطهٔ تماس دایره‌های X و M_1 به دست می‌آید (شکل ۴۵).

e) روش زیبایی برای حل مسالهٔ آپولونیوس، بر اساس بررسی‌های فضایی وجود دارد که در بند بعدی به‌آن می‌پردازیم.

§۷. بررسی‌های فضایی، وسیله‌ای برای حل مساله‌های ساختمانی هندسه

۱. اغلب‌می‌توان از بررسی‌های فضایی، برای حل‌مساله‌های ساختمانی

هندسه استفاده کرد، مثلاً در مورد حل مسالهٔ زیر:

یك مقطع مخروطی مفروض است. می‌خواهیم مقطع مخروطی دیگری رسم کنیم که با مقطع مخروطی مفروض، مماس مضاعفی داشته باشد و با سه شرط دیگر سازگار باشد و مثلاً، از سه نقطهٔ مفروض بگذرد.

با وجود این، در این جا به این مساله نمی‌پردازیم و از بررسی‌های فضایی تنها برای حل مساله‌ها و برای اثبات گزاره‌هایی استفاده می‌کنیم که در چارچوب بحث‌های مورد نظر ما باشند.

۲. ابتدا، با یاری گرفتن از بررسی شکل‌های فضایی، چند گزاره را، که مورد استفادهٔ بعدی ما هستند، ثابت می‌کنیم.

a) دو دایرهٔ $K_۱$ و $K_۲$ به مرکزهای $O_۱$ و $O_۲$ و شعاع‌های $r_۱$ و $r_۲$ را در نظر می گیریم.

از نقطه‌های $O_۱$و$O_۲$ عمودهایی بر صفحهٔ شکل رسم و روی آن‌ها، به‌ترتیب، شعاع‌های $r_۱$ و $r_۲$ را جدا می‌کنیم؛ نقطه‌های $S_۱$ و $S_۲$ را، که به این ترتیب به دست می‌آیند، به ترتیب، به‌همهٔ نقطه‌های‌محیط دایره‌های $K_۱$ و $K_۲$ وصل می‌کنیم (از $S_۱$ به نقطه‌های محیط دایرهٔ $K_۱$ و از $S_۲$ به نقطه‌های محیط دایرهٔ $K_۲$).

سطح‌های مخروطی را که به این ترتیب به دست می‌آیند و خط‌هادی آن‌ها دایره است، سطح‌های مخروطی قائم‌الزاویه می‌نامیم، زیرا هر مقطع محوری آن‌ها، یك مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.

اکنون اگر دو شعاع هم‌جهت در دو دایره رسم کنیم، این شعاع‌ها تصویرهای دو مولد موازی از سطح مخروطی خواهند بود. اگر صفحه‌ای را از این‌دو مولد بگذرانیم، اثر آن از نقطهٔ A، محل برخورد خط راستی که راس‌های دو مخروط را به‌هم وصل می کند با صفحهٔ شکل، می گذرد؛ بنابراین، خط‌راستی هم که انتهای دو شعاع را به هم وصل می کند، از نقطهٔ A می گذرد.[۵۸]

در ضمن، فرض را بر این می‌گیریم که، دو سطح مخروطی، در یك طرف صفحهٔ شکل واقع باشند.

در حالتی هم که $S_۱$ را در یك طرف و $S_۲$ را در طرف دیگر صفحهٔ شکل بگیریم، می‌توان به ترتیب مشابهی، خاصیت اصلی مرکز تشابه داخلی

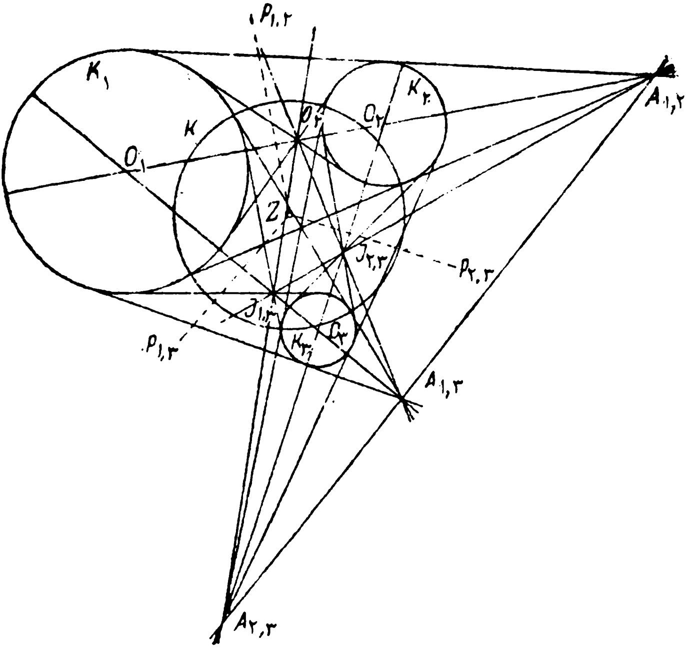
دو دایره را به دست آورد.

b) سه دایرهٔ K_1، K_2 و K_3 به‌مرکزهای O_1، O_2 و O_3 و شعاع‌های r_1، r_2 و r_3 مفروض‌اند (شکل ۴۶).

در نقطه‌های O_1، O_2 و O_3 عمودهایی بر صفحهٔ شکل، و مثلاً به‌طرف بالای صفحه، رسم و روی‌آن‌ها، بـه ترتیب، شعاع‌های r_1، r_2 و r_3 را جدا می‌کنیم. به این ترتیب، نقطه‌های S_1، S_2 و S_3 به دست می‌آید.

نقطهٔ بـرخـورد خط راست S_1S_2 با صفحهٔ شکل، نقطهٔ $A_{1,2}$، مرکز تشابه خارجی دودایرهٔ K_1 و K_2 است. همچنین ترتیب، $A_{1,3}$ در نقطهٔ برخورد صفحهٔ شکل با خط راست S_1S_3 و نقطهٔ $A_{2,3}$ در محل برخورد همین صفحه با خط راست S_2S_3 واقع‌اند.

خط‌های راست S_1S_2، S_2S_3 و S_3S_1 بر صفحه‌ای قـرار دارند که به وسیلهٔ سه راس مخروط‌ها مشخص می‌شود. بنا برایـن، اثرهای این سه خط راست برصفحهٔ شکل، یعنی $A_{1,2}$، $A_{2,3}$ و $A_{3,1}$ بریك خط راست واقع‌اند.



شکل ۴۶

در حالتی که این سطح‌های مخروطی را بـه طریق دیگری بسازیم: روی دایرهٔ K_1 در بالای صفحه و روی دایره‌های K_2 و K_3 به طرف پایین، با استدلال مشابهی ثابت می‌شود که نقطه‌های $J_{1,2}$، $J_{1,3}$ و $A_{2,3}$ بر یك خط راست قرار دارند و غیره.

به این ترتیب، به کمك بررسی‌های فضایی، این گزاره ثابت می‌شود:

شش مرکز تشابه سه دایره، راس‌های یك چهار ضلعی کامل را تشکیل می‌دهند.[59] ضلع‌های ایـن چهار ضلعی کامل را، محورهای تشابه سه دایره می‌نامند.

c) با بررسی شکل‌های فضایی می‌تـوان طرح‌های اصلی را برای نظریهٔ قطب و قطبی در دایره به‌دست آورد.

دایرهٔ K را در نظر می‌گیریم و آن را به عنوان دایرهٔ عظیمهٔ کره‌ای به حساب می‌آوریـم که یك نیمهٔ آن روی صفحهٔ شکل و نیمهٔ دیگر زیر آن واقع باشد.

اکنون اگر نقطهٔ P را بیرون کره (و روی صفحهٔ شکل) انتخاب کنیم، آن وقت قطبی آن، p، عبارت است از تصویر قائم دایرهٔ تماس مخروطی که می‌توان از نقطهٔ P بر کره محیط کرد. اگر P در طول خط راست g حرکت کند، این دایرهٔ تماس تغییر می‌کند، ولـی همیشه از نقطهٔ تماس صفحه‌های مماسی می‌گذرد که می‌توان از خط راست g بر کره رسم کرد. به این ترتیب، وقتی که نقطهٔ P روی خط راست g حرکت کند، قطبی نقطهٔ P دور نقطهٔ G دوران می‌کند.

اگر G روی خط راستی مثل f حرکت کند، آن وقت، g دور نقطهٔ F ــ قطب خط راست f ــ دوران می‌کند. قطبی g نقطهٔ G را، بنابرآن چه قبلاً گفتیم، می‌توان به‌این ترتیب پیدا کرد: از نقطهٔ G عمود برصفحهٔ شکل رسم می‌کنیم و آن را ادامه می‌دهیم تا سطح کره را در نقطه‌ای مثل S قطع کند، سپس از نقطهٔ S، صفحه‌ای برسطح کره مماس می‌کنیم؛ این صفحه، صفحهٔ شکل را روی خط راست مجهول g قطع می‌کند.

خط راست f، تصویر دایره‌ای مثل s از کره است. اگر از هر نقطهٔ محیط این‌دایره، صفحه‌ای بر کره مماس کنیم، مخروط دواری را دربرمی‌گیرند

که راس آن، F، بر صفحهٔ شکل قرار دارد.

اکنون اگر نقطهٔ G، خط راست f را بپیماید، نقطهٔ S همیشه روی محیط دایرهٔ s باقی می‌ماند، به نحوی که صفحهٔ مماس آن، همواره از F می‌گذرد، یعنی: اگر نقطهٔ G روی خط راست f حرکت کند، قطبی g دور نقطهٔ F دوران می‌کند.

d) بازهم گزاره‌ای را بر اساس بررسی‌های فضایی ثابت می‌کنیم. از این گزاره، بعد از این، بارها استفاده خواهیم کرد. این گزاره چنین است:

A، B، C و A'، B'، C' را راس‌های دومثلثی می‌گیریم که بریک صفحه واقع‌اند. ضلع این مثلث‌ها را، به ترتیب a، b، c و a'، b'، c' می‌نامیم. اگر خط‌های راستی که راس‌های متناظر A و A'، B و B'، C و C' را به هم وصل می‌کنند، از نقطهٔ S بگذرند، آن وقت ضلع‌های a و a'، b و b'، c و c' به ترتیب در نقطه‌های P، Q و R به هم می‌رسند که بر یک خط راست s واقع‌اند.

برعکس: اگر ضلع‌های a و a'، b و b'، c و c' به ترتیب یکدیگر را در نقطه‌های P، Q و R واقع بر یک خط راست قطع کنند، آن وقت، خط‌های راستی هم که راس‌های متناظر مثلث‌ها را به‌هم می‌پیوندند، از یک نقطهٔ S عبور می‌کنند.[۶۰]

برای اثبات درستی این دو گزاره با بررسی‌های فضایی، از دو حقیقت روشن زیر استفاده می‌کنیم:

۱. اگر خط راست g بر صفحهٔ F واقع باشد، اثر آن بر صفحهٔ دیگر E روی فصل مشترك دو صفحهٔ E و F واقع است.

۲. اگر خط راست g را بر صفحهٔ E تصویر کنیم، تصویر خط راست g همیشه از اثر آن بر صفحهٔ E می‌گذرد، بدون ارتباط به‌این که، مرکز تصویر در دسترس یا در بی‌نهایت باشد.

α) اکنون، مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ را طوری بر صفحه انتخاب می‌کنیم که، خط‌های راستی که از نقطه‌های A و A'، B و B'، C و C' می‌گذرند، در نقطه‌ای مثل S به‌هم برسند.

از نقطهٔ S، خط راست دلخواه h را غیرواقع برصفحهٔ E می‌گذرانیم

و روی آن، دو نقطهٔ O و O' را انتخاب می کنیم؛ نقطهٔ O را بـه راس‌های مثلث ABC و نقطهٔ O' را به راس‌های مثلث دوم $A'B'C'$ وصل می کنیم.

خطهای راست OA و $O'A'$ درنقطه‌ای مثل A'' به هم می‌رسند، زیرا بریك صفحه واقع‌اند؛ به‌همین ترتیب، OB و $O'B'$ در B'' و OC و $O'C'$ در C'' یکدیگر را قطع می کنند.

مثلث $A''B''C''$ به دست می آید که هر دو مثلث مفروض، تصویرهای مرکزی‌آن هستند: مثلث ABC عبارت است ازتصویرمرکزی مثلث $A''B''C''$ به‌مرکز O، و مثلث $A'B'C'$، تصویر مرکزی مثلث $A''B''C''$ به‌مرکز O'.

بنابراین، خطهای راست a و a' باید از اثـر خط راست $B''C''$ بر صفحهٔ E بگذرند. در این صورت، P (محل برخورد a و a') عبارت‌است از اثر خط راست $B''C''$.

به همین ترتیب نقطهٔ $Q(\equiv b \times b')$ اثر خط راست $A''C''$ و نقطهٔ $R(\equiv c' \times c')$ اثر خط راست $A''B''$ بر صفحهٔ E خواهند بود.

نقطه‌های P، Q و R باید بر خط راست فصل مشترك صفحهٔ E وصفحهٔ مثلث $A''B''C''$ قرار گیرد.

و این، بخش نخست قضیه را ثابت می کند.

β) فرض‌کنید دومثلث ABC و $A'B'C'$، طوری بر یك صفحه واقع باشند که نقطه‌های P و Q و R، نقطه‌های برخورد ضلع‌های متناظر a و a'، b و b'، c و c'، بر یك خط راست s قرار گرفته باشند.

صفحهٔ کمکی H را از s عبور می‌دهیم و مثلث $A''B''C''$ را روی‌آن طوری می‌سازیم که ضلع $B''C''$ از نقطهٔ P، ضلع $C''A''$ از نقطهٔ Q و ضلع $A''B''$ از نقطهٔ R بگذرند.

ضلع‌های این مثلث جدید را a''، b'' و c'' می‌نامیم. اکنون اگـر سه صفحه به ترتیب از خطهـای راست a و a''، b وb''، c و c'' بگـذرانیم، یکدیگر را درنقطه‌ای مثل O قطع می کنند؛ O نقطه‌ای از فضاست‌که، ازآن جا، مثلث $A''B''C''$ بر مثلث ABC تصویر می‌شود.

به‌همین ترتیب، نقطهٔO' را پیدا می کنیم که، از آن‌جا، مثلث $A''B''C''$ بر مثلث $A'B'C'$ تصویر شود.

خط راست OO' صفحهٔ E را در نقطهٔ S قطع می‌کند که باید با نقطه‌های A و A' بر یك خط راست باشد؛ به همین ترتیب درمورد نقطه‌های B، B' و C، C'. این حکم از آن جا ناشی می‌شود که نقطه‌های O و O' با هریك از زوج نقطه‌های A و A'، B و B'، C و C' بر یك صفحه واقع‌اند.[61] قضیه، به‌طورکامل ثابت شد.

دو مثلثی را که به این وضع در صفحه قرار گرفته باشند، دو مثلث همانند (homologue) گویند.

۳. نگاشت دایرهٔ صفحه در فضا (سیکلوگراف فیدلر ـ Fidler)

دایرهٔ K واقع برصفحهٔ E را به مرکز O وشعاع r در نظر می‌گیریم؛ از نقطهٔ O عمودی بر صفحهٔ E اخراج و روی‌آن به اندازهٔ r جدا می‌کنیم. به این ترتیب، به نقطه‌ای مثل P می‌رسیم.

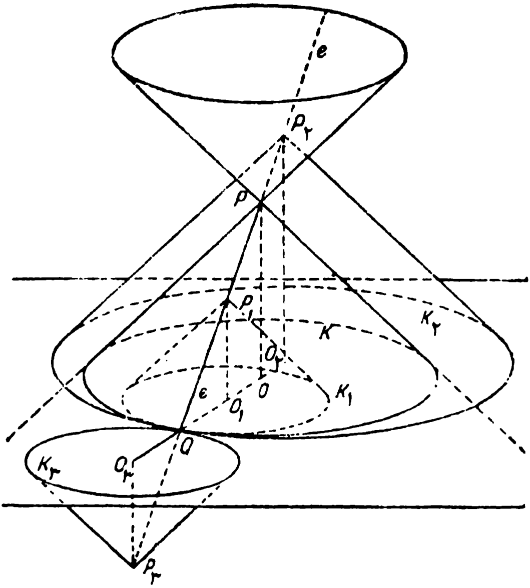
اگر برعکس، نقطهٔ P مفروض باشد، در روی صفحهٔ E متناظر با یك و تنها یك دایره است؛ برای رسم این دایره، از نقطهٔ P عمودی بر صفحهٔ Eواردودایره‌ای به‌مرکزپای عمود وشعاع برابرطول این‌عمود، رسم‌می‌کنیم.

نقطهٔ P، همراه با دایرهٔ K، مخروط قائم‌الزاویه‌ای را معین می‌کندکه قبلاً هم آن را مطالعه کرده‌ایم. هر دایرهٔ K، متناظر با دو نقطه از فضاست: یکی بالا و دیگری زیر صفحهٔ شکل (صفحهٔ E را افقی گرفته‌ایم).

اگر دایره‌ای به یك نقطه تبدیل شود،آن وقت بر تصویر فضایی خود منطبق می‌شود. خط راست g، متناظر با دو صفحه‌ای است‌که از g می‌گذرند و E را با زاویهٔ ۴۵ درجه قطع می‌کنند.[61a]

۴. دایرهٔ K را بر صفحهٔ E و نقطهٔ P را تصویر فضایی‌آن، دربالای صفحهٔ E، بگیرید (شکل ۴۷).

اکنون اگر روی مولد e از سطح مخروطی، نقطه‌ای را انتخاب‌کنیم، متناظر با دایرهٔ معینی بر صفحهٔ E خواهد بود که بر دایرهٔ K در نقطهٔ Q، اثر مولد e برصفحهٔ E، مماس است. در ضمن، اگر نقطه را بالای صفحهٔ E و زیر نقطهٔ P انتخاب‌کرده باشیم، مثلاً نقطهٔ P_1، آن‌وقت دایرهٔ متناظر آن، K_1، در داخل دایرهٔ K برآن مماس می‌شود، در حالی که دایرهٔ K_2، که متناظر با نقطهٔ P_2 دربالای P است (شکل ۴۷)، بر دایرهٔ K مماس می‌شود



شکل ۴۷

وآن را در برمی گیرد؛ دایره‌های K_3، که متناظر نقطه‌هایی از سطح مخروطی در پایین صفحهٔ E هستند، نسبت به دایرهٔ K بیرونی و بر آن مماس‌اند.

۵. حل مسالهٔ آپولونیوس دربارهٔ مماس‌ها

همین یادآوری‌های کوچك، برای حل مسالهٔ آپولونیوس دربارهٔ مماس‌ها کافی است.

سه‌دایره K_1، K_2 و K_3 را مفروض بگیرید. مخروط‌های متناظر آن‌ها را، با روش سیکلوگراف، می‌سازیم. هر دایره، متناظر با دو مخروط است. ابتدا سه مخروطی را در نظر می گیریم که در بالای صفحهٔ شکل واقع‌اند.

هر دو مخروط یکدیگر را در یك منحنی قطع می کنند که، به‌طوری که خواهیم دید، یك هذلولی است. نقطه‌های X_1 و X_2، محل برخورد این هذلولی بامخروط سوم، نقطه‌هایی هستند که به‌سطح هرسه مخروط تعلق‌دارند.

اکنون اگر روی صفحهٔ شکل، دایره‌هایی رسم کنیم که متناظر با این دو نقطهٔ X_1 و X_2 باشند، به ناچار باید بر دایره‌های مفروض مماس باشد،

یعنی دو جواب از دایره‌های مجهول به دست می‌آید.

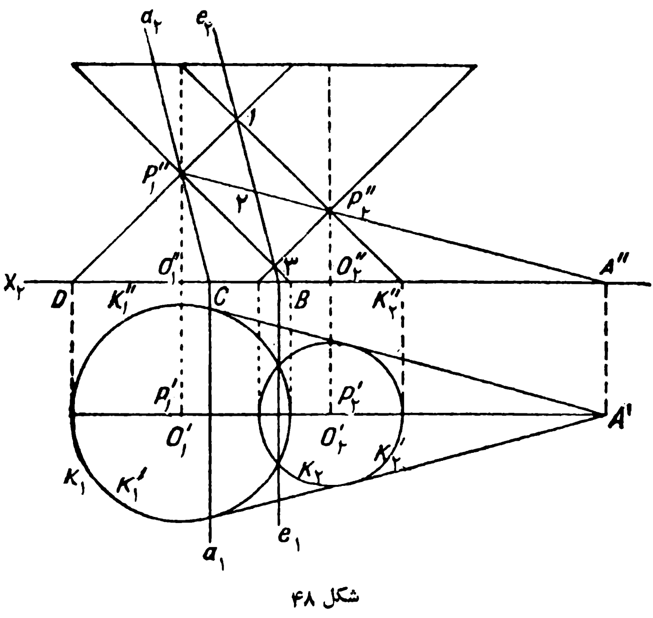
جواب‌های دیگر، از این راه به دست می‌آیند، که مخروط‌ها را تنها در بالای صفحه در نظر بگیریم و برخی از آن‌ها را در زیر صفحهٔ شکل ۱ انتخاب کنیم.

۶. روش رسم برای حل مسالهٔ آپولونیوس دربارهٔ مماس‌ها.

۱. در بالا راه حل کلی مسالهٔ آپولونیوس را آوردیم. ولی برای این که بتوانیم خود رسم را ساده‌تر انجام دهیم به برخی نکته‌های دیگر نیاز داریم.

a) روی شکل ۴۸، تصویر قائم طرح و مقطع دو سطح مخروطی قائم‌الزاویه، P_1 و P_2 داده شده است؛ محورهای این دو سطح مخروطی بر صفحهٔ افقی تصویر عمودند و از صفحهٔ قائم تصویر به یك فاصله‌اند. تصویر دوم منحنی مقطع این دو مخروط، بخشی از خط e_2 است. بنابراین، منحنی مقطع روی یك صفحه واقع و یك هذلولی است.[۶۲]

اثر اول e_1 صفحه‌ای که منحنی مقطع در آن قرار دارد، از نقطه‌های



شکل ۴۸

مشترك دو دایرهٔ K'_1 و K'_2 می‌گذرد، یعنی اثر افقی صفحهٔ شامل منحنی مقطع دو سطح مخروطی، همان محور اصلی دایره‌های K_1 و K_2 است.

b) خط راست P_1P_2 صفحهٔ اصلـی را در نقطهٔ A ــ مرکز تشابه دو دایره ــ قطع می‌کند. خط راست a_1 درشکل ۴۸، قطبی نقطهٔ A نسبت به دایرهٔ K_1 است. خط‌های راست a_1 و a_2، اثرهای صفحه‌ای هستند که از نقطهٔ P_1 می‌گذرد و صفحهٔ قطبی نقطهٔ A نسبت به مخروط P_1 نامیده می‌شود.

نقطه‌های A''، B، C و D، چهار نقطهٔ تـوافقی را تشکیل می‌دهند.[63] بنابراین، نیم‌خط‌هایی کـه نقطهٔ P''_1 را به‌این نقطه‌ها وصل می‌کنند، تشکیل دسته‌خط‌های توافقی را می‌دهند و، در نتیجه، هر خط راستی (و از آن جمله خط راست e_2) را به‌نسبت توافقی تقسیم می‌کنند.

چون نقطهٔ ۲ از شکل ۴۸ در وسط پـاره‌خط $\overline{3\,,\,1}$ قرار دارد، عضو چهارم نقطه‌های توافقی (۳، ۲، ۱) در بی‌نهایت قرار دارد و، بنابراین، خط راست a_2 بـاید موازی خط راست e_2 باشد. از این‌جا نتیجه می‌شود کـه صفحه‌های $(a_1\,,\,a_2)$ و $(e_1\,;\,e_2)$ با هم موازی‌اند.

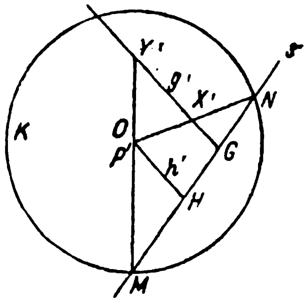
به‌این ترتیب، به‌گزارهٔ زیر می‌رسیم:

صفحهٔ $(e_1\,,\,e_2)$، کـه منحنی دومخروط P_1 و P_2 روی آن قرار دارد، با صفحهٔ قطبی نقطهٔ A نسبت به سطح مخروطی K_1(یا K_2)، یعنی صفحهٔ (a_1, a_2) موازی است.

c) دایرهٔ K را در صفحهٔ شکل در نظـر می‌گیریم (شکل ۴۹)؛ روی آن، دوباره، مخروط قائم‌الزاویهٔ بـه‌رأس P را می‌سازیم. نقطهٔ P'، تصویر رأس مخروط برصفحهٔ شکل، روی نقطهٔ O می‌افتد. نقطه‌ای مثل H ازصفحهٔ شکل را با خط راست h به‌نقطهٔ P وصل می‌کنیم؛ h' تصویراین خط راست است. از نقطهٔ دلخواه G واقع برصفحهٔ شکل، خط راست g را موازی با h رسم می‌کنیم (g' که موازی با h' است، تصویر g برصفحهٔ شکل می‌شود).

X و Y، نقطه‌های برخورد خطراست g را با سطح مخروطی پیدا کنیم.

یك صفحهٔ کمکی را از h و g می‌گذرانیم؛ این صفحه، صفحهٔ شکل را روی خط‌راست s قطع می‌کند؛ همین صفحه، سطح مخروطی را روی‌دومولد قطع می‌کند که تصویرهای آن‌ها، بر خط‌های راست OM و ON منطبق‌اند.



شکل ۴۹

نقطه‌های X و Y باید روی این مولدها باشند. به این ترتیب، نقطه‌های X' و Y' به‌دست می‌آیند (شکل ۴۹).

۲. اکنون می‌توانیم بر اساس این نکته و یادآوری‌هـای قبلی، مسالهٔ آپولونیوس را به‌سادگی حل کنیم.

سه دایـرهٔ K_1، K_2 و K_3 را به مـرکزهای O_1، O_2 و O_3 درنظـر می‌گیریم (شکل ۵۰).

a) سطح‌های مخروطـی قائم‌الزاویهٔ P_1، P_2 و P_3 را روی این سه دایره، و هر سه در بالای صفحهٔ شکل، می‌سازیم. می‌خواهیم نقطه‌های مشترک این سه مخروط را پیدا کنیم.

برای این‌منظور، منحنی فصل مشترک مخروط‌های P_1 و P_2 را درنظر می‌گیریم. این منحنی در صفحهٔ $s_{1,2}$ قرار دارد کـه از محور اصلی $p_{1,2}$ گذشته وموازی صفحه‌ای است که، همان‌طور که دربند قبلی ثابت کردیم [a) و b) را ببینید]، به‌وسیلهٔ خط راست $a_{1,2}$ و نقطهٔ P_1 معین می‌شود.

اکنون به‌منحنی فصل‌مشترک سطح‌های‌مخروطی P_1 و P_3 توجه‌می‌کنیم. این منحنی درصفحهٔ $s_{1,3}$ قرار دارد کـه از محور اصلـی $p_{1,3}$ و موازی صفحهٔ (P_1 و $a_{1,3}$) رسم شده است.

b) به‌این ترتیب، نقطه‌های مشترک سه‌سطح مخروطی، روی خط راست g فصل‌مشترک دوصفحهٔ $s_{1,2}$ و $s_{1,3}$ واقع‌اند و می‌توانند به‌عنوان نقطه‌های برخورد خط راست g با یکی از سه مخروط، ومثلاً P_1، به‌دست آیند.

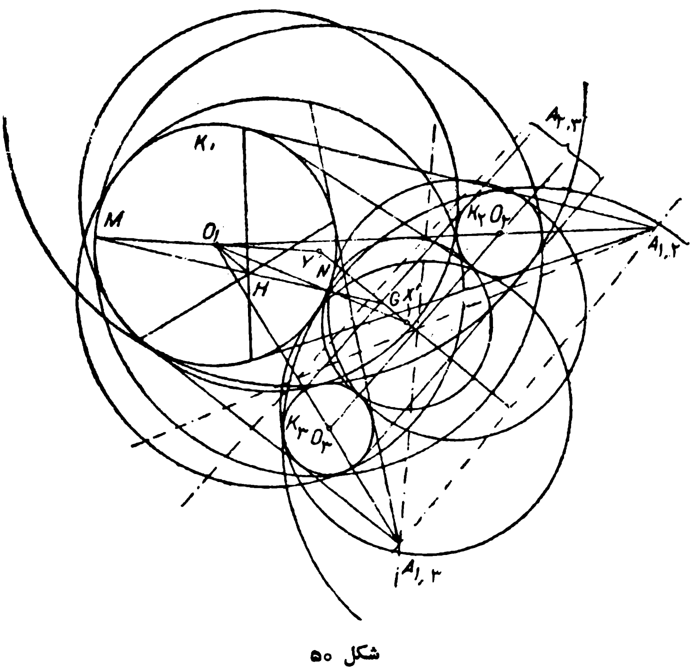
خط راست g با خط راست h ــ فصل مشترك دوصفحهٔ $(a_{1,2} \text{ ، } P_1)$ و$(a_{1,3} \text{ ، } P_1)$ ــ موازی‌است؛ بنابراین X' و Y'، تصویر نقطه‌های برخورد خط راست g با مخروط P_1 بنابر بند c) پیدا می‌شوند (شکل ۴۹).

نقطه‌های X' و Y' که به‌این ترتیب به‌دست می‌آیند، مرکزدایره‌هایی هستند که برسه‌دایرهٔ مفروض‌مماس‌اند. ازوصل نقطه‌های X' و Y' به‌مرکزهای دایره‌های مفروض، نقطه‌های تماس به‌دست می‌آید.

c) به‌این ترتیب، دو دایره از دایره‌های مجهول به‌دست می‌آید.

جواب‌های دیگر از این راه بــه دست می‌آیدکه از سه مخروط، دو مخروط را دریك طرف ویك مخروط را درطرف دیگرصفحهٔ شکل انتخاب کنیم.

هر یك از این حالت‌ها ، دو دایرهٔ جــواب را به‌دست می‌دهد و، در نتیجه، روی‌هم‌هشت‌جواب حاصل می‌شود. جواب دیگری وجود ندارد،زیرا اگــر مثلاً سه مخروط را پــایین‌.صفحهٔ شکل بگیریم، به همان جواب‌هایی



شکل ۵۰

می‌رسیم که سه مخروط را در بالای صفحهٔ شکل گرفته بودیم.

۳. این راه حل از مسالهٔ آپولونیوس را ــ که به راه حل ژرگون ($Gergonne$) معروف است ــ می‌توان به‌صورت دیگری هم مطرح کرد.

نقطهٔ H، محل برخورد خطهای راست $a_{۱,۲}$ و $a_{۱,۳}$ (شکل ۵۰)، قطب یکی از محورهای تشابه سه‌دایره است [(§۷، ۲، b)].

نقطهٔ G، محل برخورد خطهای راست $p_{۱,۲}$ و $p_{۱,۳}$، مرکز اصلی سه‌دایره است (§۶). خط‌راست $O_۱H$ برمحور تشابه‌عمود است و، بنابراین، خط راست g' هم برخط راست اخیر مماس می‌شود.

برای پیداکردن مرکزهای X' و Y'، به‌این ترتیب عمل می‌کنیم.

ابتدا، نقطهٔ G مرکز اصلی سه دایره را می‌سازیم (شکل ۵۰)، سپس H، قطب یکی از محورهای تشابه نسبت به‌دایرهٔ $K_۱$ را پیدا می‌کنیم. اگر دو نقطهٔ G و H را با خط راستی به‌هم وصل کنیم، این خط راست دایرهٔ $K_۱$ را در دو نقطهٔ M و N قطع می‌کند. تصویرهای M و N از مرکز $O_۱$ بر g'، که از نقطهٔ G بر محور تشابه عمود شده است، دو نقطهٔ مجهول X' و Y' را به ما می‌دهند.

هر یک از چهار محور تشابه سه دایره، می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد، به نحوی که روی هم، به هشت جواب می‌رسیم. روی شکل ۵۰، هر هشت دایرهٔ مماس نشان داده شده است.

مساله‌هایی برای تمرین

۸۸. مطلوب است مکان هندسی نمایش‌های فضایی P، همهٔ دایره‌هایی از صفحه، که بر دوخط راست مماس‌اند.[۶۴]

۸۹. مجموعهٔ همهٔ دایره‌هایی را که دارای یک محور اصلی مشترک باشند، دسته دایره گویند.[۶۵]

وقتی که دو دایره از دسته، یکدیگر را در دو نقطهٔ حقیقی قطع کنند، بەنحوی که دسته دارای دونقطهٔ اصلی باشد، آن‌وقت، در بین دایره‌های‌دسته، کوچکترین دایره وجود دارد و آن دایره‌ای است به‌قطر وتر مشترک‌دایره‌های دسته. درحالتی هم که دایره‌های‌یک دسته، دارای دونقطهٔ مشترک حقیقی نباشند،

دو نقطهٔ K_1 و K_2 وجود دارد که باید هر کدام از آن‌ها را، یکی از دایره‌های دسته به‌حساب آورد.

اگر P را نقطهٔ برخورد محور اصلی با خط‌المرکزین، p^2 را قوت نقطهٔ P نسبت به همهٔ دایره‌های دسته، d را فاصلهٔ مرکز یکی از دایره‌های دسته تا نقطهٔ P و r را شعاع همین دایره بگیریم، همیشه برابری زیر برقرار است:

$$r^2 = d^2 - p^2$$

بنابراین، درحالت $d = p$ داریم $r = 0$.

نمایش فضایی دسته دایره‌ای که دارای دو نقطه مشترك حقیقی هستند، کدام منحنی را رسم می‌کند؟ درحالت نقطه‌های مشترك موهومی چطور؟[۶۶]

۹۰. هر دسته دایره، متناظر است با دسته دایره‌ای عمود بر آن.[۶۷] اگر p محور اصلی مشترك دایره‌های دستهٔ اول باشد، هر نقطه از خط راست p مرکز یکی از دایره‌هایی است که همهٔ دایره‌های دستهٔ اول را، به‌صورت عمود بر آن، قطع می‌کند.

اگر همهٔ این دایره‌های عمود را رسم کنیم، دسته دایره‌ای تشکیل می‌دهند که، دایره‌های دستهٔ اول دارای نقطه‌های مشترك حقیقی یا موهومی باشند، دسته دایره‌های عمود بر آن‌ها، دارای نقطه‌های مشترك موهومی یا حقیقی‌اند.

اکنون فرض کنید یك دسته دایره وهم، دسته دایرهٔ عمود بر آن، مفروض باشند. نمایش فضایی دایره‌های این دو دسته را پیدا کنید.

۹۱. دایرهٔ K و نقطهٔ A واقع درصفحهٔ شکل داده شده‌اند. نمایش‌های فضایی همهٔ دایره‌هایی که درصفحهٔ شکل، از نقطهٔ A می گذرند. و بر دایرهٔ K مماس‌اند، چه مکان هندسی را تشکیل می‌دهند؟[۶۸]

۹۲. خط راست g مفروض است. مکان هندسی نمایش فضایی همهٔ دایره‌هایی ازصفحه راکه بر خط راست g مماس‌اند، پیدا کنید.[۶۹]

۹۳. یك خط راست ویك نقطه مفروض‌اند. همهٔ سطح‌های مخروطی قائم‌الزاویه‌ای را در نظر می گیریم که متناظر با دایره‌هایی باشندکه بر خط راست مفروض مماس‌اند و از نقطهٔ مفروض گذشته‌اند. مطلوب است مکان

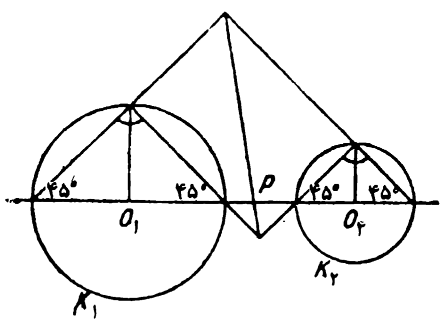
هندسی رأس‌های همه این سطح‌های مخروطی قائم‌الزاویه.[۷۰]

۹۴. دایره‌ای مفروض است. مطلوب است مکان هندسی نمایش‌فضایی همهٔ دایره‌هایی از صفحه که بر دایرهٔ مفروض مماس‌اند.[۷۱]

۹۵. دو دایـره مفروض‌اند. مطلوب است مکان هندسی رأس‌های همهٔ سطح‌های مخروطی قائم‌الزاویه‌ای که متناظر با دایره‌های مماس بر دو دایرهٔ مفروض باشند.[۷۲]

۹۶. یك خط راست و یك دایـره داده شده‌اند.مکان هندسی رأس‌های سطح‌های مخروطی قائم‌الزاویه‌ای را پیدا کنید که متناظر با همهٔ دایره‌هایی باشند که بر خط راست مفروض و دایرهٔ مفروض مماس‌اند. (مساله‌های ۹۲ و ۹۴ را ببینید).

۹۷. دو دایرهٔ K_1 و K_2 مفروض‌اند. اگرخط‌های راستی را، آن‌طور که درشکل ۵۱ دیده می‌شود، رسم کنیم، آن‌وقت، نقطهٔ P روی محوراصلی دو دایره قرارمی‌گیرد. (اثبات را می‌توان ازشکل ۴۸ و ازراه دوران‌صفحهٔ تقارن دوسطح مخروطی به‌دست آورد.)



شکل ۵۱

۹۸. دو دایره ونقطهٔ P مفروض‌اند. مـی‌خواهیم، بـا روش ژرگون، چهاردایرهٔ مماس را رسم کنیم.

محور اصلی یك نقطه ویك دایره، خط‌راستی است که وسط مماس‌های مرسوم ازنقطه به‌دایره را به‌هم وصل می‌کند. اگر یك نقطه ویك‌دایره داشته باشیم، مرکزهای‌تشابه‌بیرونی و درونی آن‌ها، برنقطهٔ‌مفروض منطبق‌می‌شوند.

بنابراین، وقتی که با دو دایره و یك نقطه سروکار داشته باشیم، تنها دو محور تشابه وجود خواهد داشت.

۹۹. دو دایره ویك خط راست‌مفروض‌اند. می‌خواهیم همهٔدایره‌هایی را رسم کنیم که بر دایره‌ها و خط مفروض مماس باشند.

اگر یکی از دو دایره به خط راست تبدیل شود، محور اصلی آن‌ها بر همان خط راست منطبق خواهد شد؛ در ضمن، مرکزهای تشابه دو دایره، دراین حالت، برمحیط دایره قرارمی‌گیرد: مرکز تشابه داخلی برنزدیك‌ترین نقطهٔ محیط دایره نسبت به‌خط راست، ومرکز تشابه خارجی بردورترین نقطهٔ محیط دایره نسبت به‌خط راست، منطبق می‌شوند.

همهٔ ساختمان‌ها، به‌همان‌صورت قبلی، انجام می‌گیرد.

۱۰۰. یك دایره، یك خط راست و یك نقطه داده است. می‌خواهیم همهٔ دایره‌هایی را رسم کنیم که بر دایره و خط راست مفروض مماس باشند و از نقطهٔ مفروض بگذرند.

اگر از دو دایرهٔ مفروض، یکی به‌خط راست و دیگری به نقطه منجر شود، محور اصلی دو دایره بر خط راست و مرکزهای تشابه بر نقطه منطبق می‌شوند. در این حالت هم، دوباره، روش رسم ژرگون به‌کار می‌رود.

۱۰۱. یك‌دایره و دونقطه داده شده‌است. می‌خواهیم همهٔدایره‌هایی‌را رسم کنیم که از نقطه‌های مفروض بگذرند و بر دایرهٔ مفروض مماس باشند.

در حالتی که دو دایره منجر به نقطه شوند، محور اصلی آن‌ها، عمود‌منصف پاره‌خطی است که دو نقطه را به‌هم وصل می‌کند؛ مرکز تشابه داخلی بروسط این پاره‌خط قرار می‌گیرد ومرکزتشابه خارجی به‌بی‌نهایت می‌رود.

§ ۸. حل تقریبی مساله‌های ساختمانی

۱. در بندهای قبلی، مهم‌ترین روش‌هایی راکه برای حل مساله‌های ساختمانی هندسه مناسب‌اند، مطالعه‌کردیم و آن‌هارا درحل مساله‌های زیادی به‌کار بردیم.

با همهٔ این‌ها، وقتی که با مسالهٔ هندسی تازه‌ای مواجه می‌شویم و

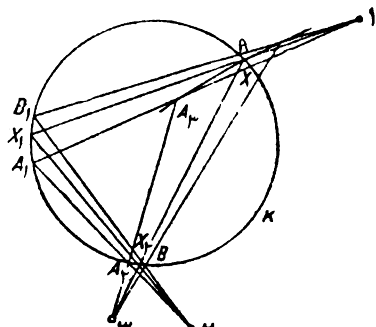
می‌خواهیم شکلی را رسم کنیم، اغلب باید مدتی طولانی در بارهٔ آن بیندیشیم و آن را مورد تجزیه و تحلیل قرار دهیم تا بتوانیم روش مناسب را برای حل آن پیدا کنیم.

۲. ولی اگر می‌خواهیم یك مسالهٔ هندسی را به‌سرعت حل کنیم و، در ضمن، راه حل دقیق آن‌را نمی‌دانیم، یا اصلاً چنین راه‌حلی به‌کمك پرگار و خط‌کش وجود ندارد (در بارهٔ این گونه مسالدها، بعداً صحبت خواهیم کرد)، آن‌وقت می‌توانیم به‌راه حل تقریبی متوسل شویم.[۷۳]

یکی ازروش‌های کاملاً معمول حل تقریبی را، ضمن یك مثال، روشن می‌کنیم.

۳. می‌خواهیم این مسالهٔ ساختمانی را حل کنیم.

دایرهٔ K و سه نقطهٔ ۱، ۲ و ۳ مفروض‌اند (شکل ۵۲). می‌خواهیم مثلث XX_1X_2 را در دایرهٔ K محاط کنیم، به نحوی که ضلع‌های مثلث (یا امتداد آن‌ها) ازنقطه‌های مفروض ۱ و ۲ و ۳ بگذرند (با مسالهٔ ۸۵ مقایسه کنید).



شکل ۵۲

نقطه‌ای مثل A را بر محیط دایره انتخاب و، سپس نقطه‌های A_1، A_2 و A_3 را معین می‌کنیم (شکل ۵۲). اگر A_3 بر A منطبق شود، نقطهٔ A، همان نقطهٔ مجهول X است.

اگر جای نقطهٔ انتخابی A را تغییر دهیم، نقطهٔ A_3 روی یك منحنی

مثل f حرکت می‌کند که آن‌را، منحنی خطا می‌نامیم. منحنی خطا، دایرهٔ K را در نقطهٔ مجهول X قطع می‌کند.

کافی است چند نقطه از f را که در نزدیکی برخورد آن با K قرار دارند، پیدا کنیم.

با این روش می‌توان مثلث مجهول را، با دقتی که درعمل کافی است، پیدا کرد.

فصل دوم

ساختمان‌های هندسی، تنها به کمك رسم خط‌های راست، به شرطي که از شکل‌های مفروض استفاده کنیم (روش شتینر)

§۹. مقدمه

۱. در این فصل مساله‌هایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که می‌توان آن‌ها را به کمك رسم خط‌های راست حل کرد، به شرطی که روی صفحهٔ شکل، دوخط راست موازی، یا یك متوازی‌الاضلاع و، درحالت خاص، یك مربع و یا بالاخره، یك دایره داده شده باشد.

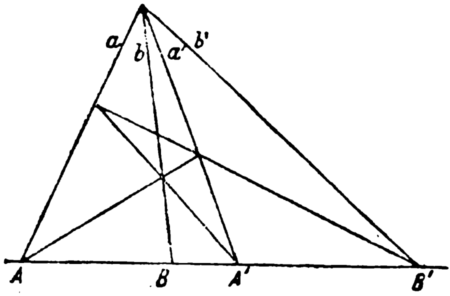
۲. مساله‌هایی هم وجود دارند که می‌توان آن‌ها را منحصراً با رسم خط‌های راست حل کرد، بدون این که شکل مفروض دیگری مورد استفاده قرار گیرد.[۷۴]

مثلاً به این طریق می‌توان، با مفروض بودن سه نقطهٔ A و B و A'، نقطهٔ B' را طوری پیدا کرد که زوج توافقی B نسبت به A و A' باشد (شکل ۵۳).[۷۵]

به همین ترتیب، با معلوم بودن سه نیم خط از یك دستهٔ توافقی، می‌توان نیم خط چهارم آن، b' را پیدا کرد (شکل ۵۳).

مسالهٔ زیرا را هم می‌توان، تنها با رسم خط‌های راست، وبدون کمك گرفتن از فرض‌های دیگر، حل کرد.

دو خط راست a و b و نقطهٔ P مفروض‌اند (شکل ۵۴). می‌خواهیم خط راستی از نقطهٔ P طوری بگذرانیم که از نقطهٔ برخورد دو خط راست



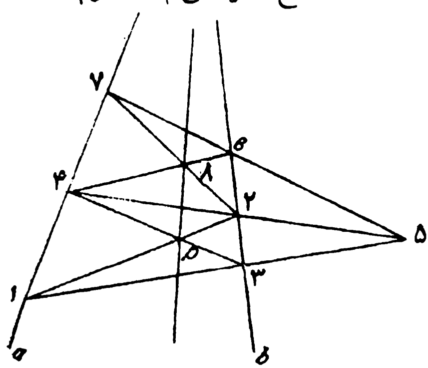
شکل ۵۳

مفروض a و b، که دردسترس نیست،[۷۶] بگذرد. راه‌حل از روی شکل روشن است؛ این راه حل بر اساس دوبار استفاده از قضیه‌ای که در شکل قبل بیان شد، قرار دارد.

در هندسهٔ تصویری هم، مساله‌های زیادی وجود دارد که می‌توان آن‌ها را، تنها با رسم خط‌های راست، و بدون یاری عنصرهای دیگری، حل کرد. مثلاً، اگر پنج نقطه از یك مقطع مخروطی معلوم باشد، به‌کمك شش‌ضلعی پاسکال می‌توان، تنها با رسم خط‌های راست، نقطهٔ برخورددیگرمقطع مخروطی را، با خط راستی که از یکی از پنج نقطهٔ مفروض می‌گذرد، پیدا کرد.

بازهم مسالهٔ دیگری از این نوع.

اگر پنج نقطهٔ A، B، C، D و E از مقطع مخروطی K_1 و پنج نقطهٔ A، B، C، F و G از مقطع مخروطی K_2 معلوم باشند، به نحوی که سه‌نقطهٔ



شکل ۵۴

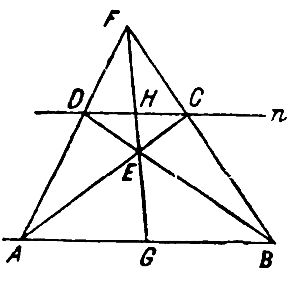
مشترك این مقطع‌های مخروطی را داده باشند، آن وقت می‌توان نقطهٔ مشترک چهارم این دو مقطع مخروطی را، تنها به‌کمك خط‌های راست، پیدا کـرد.

۱۰۲. دو راس از یك چهارضلعی، در نقطه‌های قابل دسترس درصفحه و دو راس دیگر در بخش غیر قابل دسترس صفحه قرار دارند. می‌خواهیم، تنها با رسم خط‌های راست، خط راستی را رسم کنیم که دو راس غیر قابل دسترس چهارضلعی را بههم وصل می‌کند.

§۱۰. ساختمان‌هایی که، تنها با رسم خط‌های راست و به‌شرط مفروض بودن دو خط راست موازی، عملی هستند*

ابتدا باید از قضیه‌ای یادکنیم که، بعد از این، اغلب مورد استفادهٔ ما قرار می گیرد.

۱. اگر E، نقطهٔ برخوردقطرهای ذوزنقهٔ $ABCD$ را به F، نقطهٔ برخورد ضلع‌های ناموازی، آن وصل کنیم، آن وقت ، ضلع AB به وسیلهٔ خط راست EF نصف می‌شود.



شکل ۵۵

در واقع، داریم:

$$\overline{AG} : \overline{GB} = \overline{DH} : \overline{HC} ،$$

$$\overline{AG} : \overline{GB} = \overline{HC} : \overline{DH}$$

از ضرب این دو رابطه، اثبات حکم به دست می آید.

به‌کمك این قضیه، می‌توان مساله‌های زیر را حل کرد.

۱۰۳. سه نقطهٔ A، G و B روی خط راستی چنان‌داده‌شده‌اند که نقطهٔ G در وسط پاره‌خط AB قرار دارد. می‌خواهیم، تنها بارسم خط‌های راست، خط راستی بکشیم که از نقطهٔ مفروض D بگذرد و موازی با خط راست مفروض باشد.

۱۰۴. دو خط راست موازی m و n و، روی خط راست m، پاره‌خط

---

*) ساختمان‌هایی که در§§ ۱۰، ۱۱، ۱۲ و ۱۳ داده شده است، در کتاب یاکوب شتینر ریاضی‌دان آلمانی (چاپ ۱۸۳۳) داده شده است.

AB داده شده است. می‌خواهیم این پاره‌خط را، تنها با رسم خط‌های راست نصف کنیم.

۱۰۵. دو خط راست موازی m و n و نقطهٔ P، در بیرون آن‌ها، داده شده‌است. می‌خواهیم، تنها با رسم خط‌های راست، خط راستی را رسم کنیم که از نقطهٔ P بگذرد و با خط‌های راست مفروض موازی باشد. (ابتدا روی خط راست m، دو پاره‌خط برابر بسازید.)

۱۰۶. دو خط راست موازی m و n، و روی m، پاره خطی داده شده است. می‌خواهیم، تنها با رسم خط‌های راست، این پاره‌خط را دوبرابر کنیم.

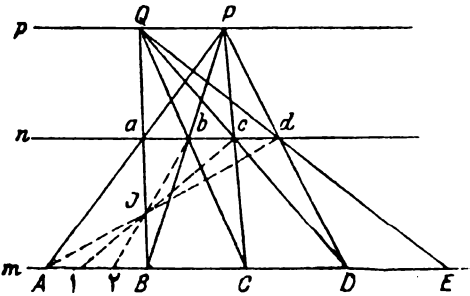
۲. اگر دو خط راست موازی m و n و پاره‌خط AB واقع بر یکی از آن‌ها مفروض باشد، به سادگی می‌توان مساله‌های زیر را حل کرد.

۱۰۷. می‌خواهیم پاره خط AB را چندبار بزرگ کنیم. (خط راست p را موازی m رسم کنید؛ مسالهٔ ۱۰۵ را ببینید.)

۱۰۸. می‌خواهیم پاره‌خط AB را به چند بخش برابر، و مثلاً به سه بخش برابر، تقسیم کنیم. (ابتدا پاره‌خط AB را سه برابر و، سپس، نقطهٔ J را پیدا کنید (شکل ۵۶).)

۱۰۹. می‌خواهیم روی خط راست m، پاره‌خطی بسازیم که نسبت طول آن به طول پاره خط AB برابر با نسبت $r:s$ باشد، که در آن، r و s دوعدد درست و نسبت به‌هم اول‌اند. (پاره‌خط AB را به s بخش برابر تقسیم کنید و یکی از این بخش‌ها را r مرتبه بزرگ کنید.)

۱۱۰. می‌خواهیم پاره‌خط AB را بر نسبت $r:s$ تقسیم کنیم.



شکل ۵۶

یادداشت. بریانشون*، در کتاب خود، روش بسیار زیبایی برای پیدا کردن یك سوم، یك چهارم، یك پنجم، . . . از پاره‌خط مفروض AB ، تنها با رسم خطهای راست، می‌آورد، با این‌شرط که خط راستی مثل ab، موازی با خط راست AB داده شده باشد.

نقطهٔ دلخواه P را انتخاب (شکل ۵۷) و خطهای راست Ab و Ba را رسم می‌کنیم؛ پاره‌خط AD برابر با نصف پاره‌خط AB است. سپس، اگر خطهای راست Da و Pe را رسم کنیم، پاره‌خط AE برابر یك‌سوم پاره‌خط AB می‌شود ، زیرا نقطه‌هـای A، E، D و B، چهار نقطهٔ توافقی را تشکیل می‌دهند (وضع این نقطه‌ها را نسبت به‌چهارضلعی کامل $aed\,P$ در نظر بگیرید).

در واقع داریم:

$$\overline{AE} : \overline{ED} = \overline{AB} : \overline{DB}$$

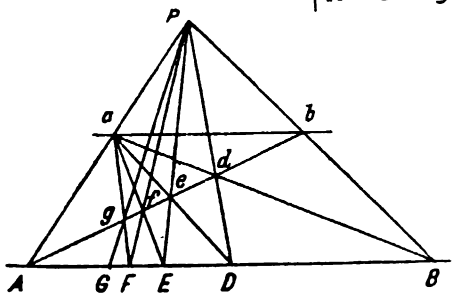
ولی چون $\overline{AB} = ۲\overline{DB}$، از آن جا نتیجه می‌شود:

$$AE = ۲\overline{ED}$$

به نحوی که

$$\overline{AE} = \frac{۱}{۳}\overline{AB}$$

سپس، اگر خطهای راست Ea و Pf را رسم کنیم، نقطهٔ F به‌دست می‌آید که در مورد آن داریم:



شکل ۵۷

1. Brianchon, «Application de la théorie des Transversales», 1818.

$$\overline{AF} = \frac{۱}{۴}\overline{AB}$$

که از چهار نقطهٔ توافقی A، F، E و D نتیجه می‌شود.

اگر خط‌های راست Fa و Pg را رسم کنیم، نقطهٔ G به دست می‌آید و در ضمن

$$\overline{AG} = \frac{۱}{۵}\overline{AB}$$

که نتیجه‌ای از چهار نقطهٔ توافقی A، G، F و E است.

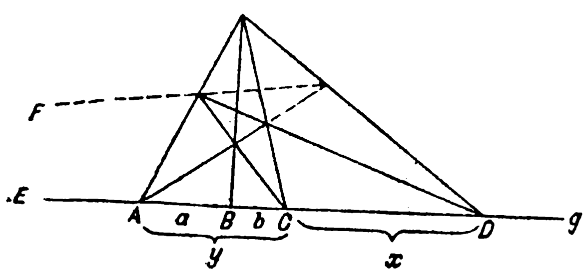
این ساختمان را، تا هر جا که لازم باشد، می‌توان ادامه داد.

۱۱۱. فرض می‌کنیم، شکل ۵۷ را بـه طور کامل، بر صفحهٔ دیگری چنان تصویر کرده باشیم که نقطهٔ P به بی‌نهایت برود و زاویهٔ A قائمه شود. چگونه شکلی به دست می‌آید؟

۳. دو پاره‌خط AB و BC را روی خط راست g بـه نحوی مفروض می‌گیریم که نسبت به هم، بر نسبت دیگـری $a : b$ (و مثلاً ۳ : ۵) قرار گرفته باشند. می‌خواهیم، تنها با استفاده از رسم خط‌های راست، خط راستی رسم کنیم که از نقطهٔ مفروض P بگذرد و با خط راست g موازی باشد (شکل ۵۸).

مساله منجر به این می‌شود که روی خط راست g، دو پاره‌خط برابر پیدا کنیم.

a را بزرگتر از b می‌گیریـم و نقطهٔ چهارم D، از نقطه‌های توافقی را می‌سازیم (شکل ۵۸). در این صورت



شکل ۵۸

$$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{AD}:\overline{CD}$$

یا

$$a:b=(a+b+x):x$$

یعنی

$$x=\frac{b(a+b)}{a-b}$$

و بنابراین

$$\overline{CD}:\overline{AC}=\frac{b(a+b)}{a-b}:(a+b)=b:(a-b)$$

به‌این ترتیب، دو پاره‌خط به‌دست می‌آید که نسبتی برابر $b:(a-b)$ دارند، در ضمن صورت و مخرج این نسبت (که عددهایی درست‌اند)، به ترتیب، کوچکتر از صورت و مخرج نسبت قبلی هستند.[۷۷] در حالت‌خاص ما، نسبت جدید برابر ۲ : ۳ می‌شود.)

اکنون، همین عمل را درمورد پاره‌خطهای AC وCD انجام‌می‌دهیم، یعنی نقطهٔ E زوج توافقی C نسبت به دو نقطهٔ A و D را پیدا می‌کنیم و دو پاره‌خط به دست می‌آوریم که، برای آن‌ها، صورت و مخرج نسبت، دوباره کوچکتر از صورت و مخرج قبلی است. با ادامهٔ این ساختمان، سرانجام، به پاره‌خطهای باطول‌های برابر می‌رسیم.

در حالت خاص مثال ما

$$\overline{AB}:\overline{BC}=۵:۳$$

بنابراین (شکل ۵۸):

$$\overline{AC}:\overline{CD}=۲:۳$$

اگر نقطهٔ E زوج توافقی C را نسبت به A و D بسازیم:

$$\overline{AD}:\overline{DE}=۲:۱$$

و اگر بالاخره، نقطهٔ F زوج توافقی D نسبت به A و E را بسازیم، به دو پاره‌خط برابر AE و EF می‌رسیم، زیرا

$$\overline{AE} : \overline{EF} = ۱ : ۱$$

یعنی

$$\overline{AE} = \overline{EF}$$

۴. از این مساله روشن می‌شود که استفادهٔ از دو خط راست موازی با استفاده از دو پاره‌خطی که به نسبت گویایی مفروض باشند، هم ارز است؛ یعنی اگر دو خط راست موازی، داده شده باشد، به سادگی می‌توان پاره‌خطهایی را به نسبت گویای مفروض ساخت؛ و برعکس، اگر دو پاره‌خط به نسبت معلوم گویایی داده شده باشد، می‌توان خطهای راست موازی را رسم کرد.

§۱۱. ساختمان‌هایی که، تنها با رسم خطهای راست و به کمك متوازی‌الاضلاع مفروض، انجام می‌شوند

در این حالت می‌توان مساله‌های زیر را حل کرد (مثل همیشه، تنها به‌کمك رسم خطهای راست).

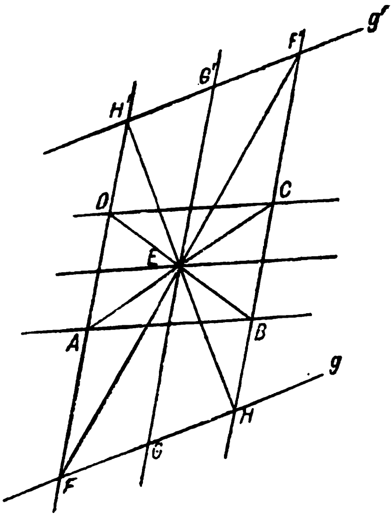
۱۱۲. می‌خواهیم خط راستی رسم کنیم که از نقطهٔ مفروض P بگذرد و با یکی از ضلع‌های متوازی‌الاضلاع مفروض $ABCD$ موازی باشد (شکل ۵۹).

۱۱۳. می‌خواهیم از نقطهٔ دلخواه و مفروض، خط راستی بگذرانیم که با خط راست دلخواه و مفروض g موازی باشد.

(روی خط راست g، دو پاره خط برابر FG و GH به دست می‌آید. جواب دوم، روی شکل ۵۹ روشن است و به‌سادگی امکان می‌دهد تا خط راست g' را موازی با g رسم کنیم.)

۱۱۴. پاره‌خط AB، که به‌صورتی دلخواه نسبت به‌متوازی‌الاضلاع قرار گرفته، مفروض است. می‌خواهیم این پاره‌خط را به‌نسبت مفروض تقسیم کنیم.

۱۱۵. سه خط راست موازی a، b و c، روی خط راست چهارم d،



شکل ۵۹

پاره‌خط‌هایی به نسبت معلوم $p : q$ پدید آورده‌اند. کدام شکل هم ارز با این شکل است؟[۷۸]

۱۱۶. دو پاره‌خط، روی خط مفروضی، بـه نسبت گویای معینی قرار گرفته‌اند. می‌خواهیم متوازی‌الاضلاع را بسازیم*.

§۱۲. ساختمان‌هایی که می‌توان آن‌ها را، تنها با رسم‌خط‌های راست به انجام رسانید، وقتی که یك مربع داده شده باشد.

اگر اجازه داشته باشیم از وجود یك مربع مفروض در صفحهٔ شکل استفاده کنیم، علاوه بر همهٔ مسالـه‌های §۱۰ و §۱۱، مساله‌های زیر را هم می‌توانیم حل کنیم.

۱۱۷. می‌خواهیم عمودی بر خط راست دلخواه FG کـه از مرکز

*) در این مسالهٔها، اغلب به جز راه حلی که فوراً به نظر می‌آید، راه‌حل‌های دیگری هم وجود دارند کـه ساده‌ترند؛ همیشه باید در جست‌وجوی ساده‌ترین راه حل بود.

مربع گذشته است، رسم کنیم.

GH را موازی CB (شکل ۶۰) و سپس HX را موازی BD رسم می‌کنیم. در این صورت $XY \perp FG$.[۷۹]

۱۱۸. خط راست g و نقطهٔ P مفروض‌اند. می‌خواهیم از نقطهٔ P عمودی بر خط راست g رسم کنیم. (از نقطهٔ E واقع بر خط راست g'، موازی با g رسم کنید و غیره.)

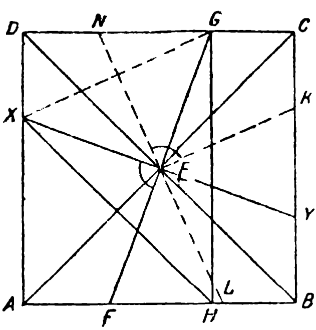
۱۱۹. زاویهٔ قائمهٔ XEG، که رأس آن درمرکز مربع است داده‌شده (شکل ۶۰). می‌خواهیم این زاویهٔ قائمه را نصف کنیم. (اگر EK را موازی XG و LN را عمود بر EK رسم کنیم، نیمساز زاویه به دست می‌آید.)

۱۲۰. می‌خواهیم زاویهٔ قائمهٔ دلخواهی را نصف کنیم.

۱۲۱. از سه نیم خط a، b و c، دو نیم خط b و c، بر هم عمودند. نیم خط چهارم d را طوری رسم کنید که زاویهٔ بین b و d، برابر با زاویهٔ بین a و b باشد. (چون نیم خط d زوج توافقی a نسبت به نیم خطهای b و c است،[۸۰] بنابراین، نیم خط d را می‌توان تنها به‌کمك خطهای راست، رسم کرد.)

۱۲۲. زاویهٔ ab داده شده است (یعنی، زاویهٔ بین نیم خطهای a و b)، می‌خواهیم آن را چند برابر کنیم. (مسألهٔ قبل را درنظر داشته باشید.)

به این ترتیب، به‌کمك مربع می‌توان یك زاویه را هر چند مرتبه که بخواهیم بزرگ کنیم.



شکل ۶۰

§۱۳. رسم شکل‌ها، تنها به‌کمك خط‌های راست، وقتی که یك دایرهٔ ثابت و مرکز آن مفروض باشد[۸۱]

۱. دایرهٔ K و مرکز آن O، داده شده است.

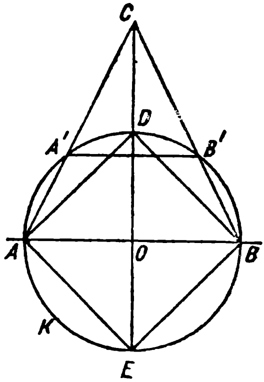
در این صورت، می‌توان مربع را، تنها به‌کمك خط‌های راست، رسم کرد (شکل ۶۱): $A'B'$ را موازی باقطر AB $(\overline{AO}=\overline{OB})$ رسم و، سپس، به ترتیبی که در شکل دیده می‌شود، عمل می کنیم.

به این ترتیب، بـه کمك دایـرهٔ K و مـرکـز آن O، می‌تـوان همهٔ ساختمان‌هایی راکه در بندهای ۹، ۱۰، ۱۱ و ۱۲ داشتیم، تنها به‌کمك رسم خط‌های راست، انجام داد: رسم موازی‌ها، رسم عمودها، تقسیم پاره خط به n بخش برابر یا ساختن پاره خطی چند برابر پاره خط مفروض و، بالاخره، چند برابر کردن یك زاویه.

علاوه براین‌ها، اکنون می‌توان مسأله‌هایی را حل کرد که، به‌کمك یك مربع، قابل‌حل نیستند، مثل تقسیم‌یك زاویهٔ دلخواه به‌دو زاویهٔ برابر. به‌طور کلی خواهیم دید، هرمسأله‌ای که به‌کمك پرگار وخط کش قابل‌حل باشد، به‌کمك یك‌دایرهٔ ثابت (ومرکز آن) وتنها رسم‌خط‌های‌راست، قابل حل است (یعنی، همهٔ مسأله‌های هندسهٔ مقدماتی و همهٔ به اصطلاح مسأله‌های درجه دوم).

۲. به بررسی یکی از این مسأله‌ها می‌پردازیم.

۱۲۳. علاوه بر دایرهٔ کمکی K، پاره خط AB، خط راست g و نقطهٔ



شکل ۶۱

C واقع بر g داده شده است (شکل ۶۲). می‌خواهیم روی خط راست g، نقطهٔ X را طوری پیدا کنیم که برابری $CX = AB$ برقرار باشد.*

پاره خط OD (شکل ۶۲) را موازی و برابر AB، g' و g'' را موازی g، DG را موازی EF، GH را موازی OA و بالاخره، HX را موازی AC رسم می‌کنیم.

۳. حالا ثابت می‌کنیم که، با استفاده از دایرهٔ کمکی، می‌توان هر مسألهٔ درجهٔ دوم را، تنها با رسم خطهای راست، حل کرد.

ابتدا، نکته‌های زیر را یادآوری می‌کنیم.

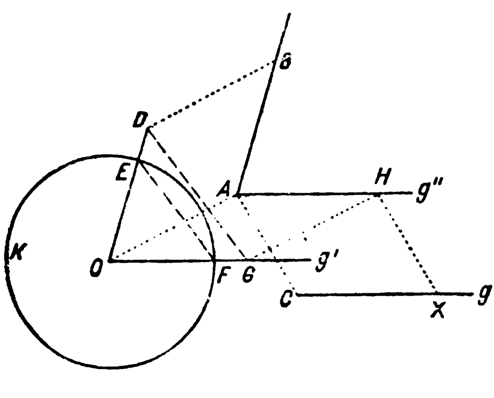
هرمسألهٔ ساختمانی هندسه، هرقدر که پیچیده باشد، وقتی‌که با استفادهٔ بدون قید و شرط پرگار و خط‌کش قابل حل باشد، همیشه از تعداد معینی عمل‌های ساده تشکیل شده است.

به‌کمك خط‌کش می‌توان تنها عمل‌های زیر را انجام داد:

۱) رسم خط راست؛

۲) پیداکردن محل برخورد خط راستی‌که رسم‌کرده‌ایم، با خط راست مفروض؛

۳) پیداکردن نقطه‌های برخورد خط راستی‌که رسم‌کرده‌ایم، با کمان دایرهٔ مفروض.



شکل ۶۲

---

*) البته، مثل همهٔ مسأله‌های این بخش، تنها با رسم خطهای راست.

به‌کمك پرگار، تنها عمل‌های زیر را می‌توان انجام داد:

۴) رسم دایره؛

۵) پیدا کردن نقطه‌های برخورد دایره‌ای که رسم کرده‌ایم، با خط راست مفروض؛

۶) پیدا کردن نقطه‌های برخورد دایره‌ای که رسم کرده‌ایم، با دایرهٔ مفروض.[۸۲]

انجام این عمل‌ها، به‌کمك پرگار و خط‌کش (وقتی که استفادهٔ از آن‌ها محدودیتی نداشته باشد)، هیچ‌گونه دشواری ایجاد نمی‌کند، دشواری مربوط به زمانی است‌که این عمل‌ها، به صورت ترکیبی مطرح باشند.

برعکس، اگر با ابزارهای محدود و مشروط رسم سر و کار داشته باشیم، قبل‌از همه باید ثابت کرد که، به‌کمك این وسیله‌های محدود، می‌توان عمل‌های مذکور در فوق را انجام داد.[۸۳] با این اثبات، روشن می‌شود که همهٔ مسأله‌های ساختمانی درجهٔ دوم را می‌توان باوسیله‌های محدود، حل کرد.

۴. در حالت مورد نظر ما، تنها می‌توان خطهای راست رسم کرد.

بنابراین، انجام عمل‌های ۱ و ۲، به هیچ اشکالی بر نمی‌خورد. عمل ۴ را نمی‌توانیم با رسم خطهای راست انجام دهیم؛ ولی می‌توانیم تعداد دلخواهی از نقطه‌های محیط دایره را، همان طور که خواهیم دید، به دست آوریم. بنابراین، باید ثابت کنیم که با وسیله‌های محدود خود، می‌توانیم مسأله‌های زیر را حل کنیم.[۸۴]

A) دایره‌ای به وسیلهٔ مرکز و شعاع آن و، به‌جز آن، یك خط راست داده شده است. می‌خواهیم نقطه‌های برخورد خط راست با دایره را پیدا کنیم.

B) دو دایره به وسیلهٔ مرکز و شعاع خود، مفروض‌اند. می‌خواهیم نقطه‌های برخورد این دو دایره را پیدا کنیم.

۵. مسألهٔ B را می‌توان به مسألهٔ A منجر کرد، زیرا تنها به‌کمك رسم خطهای راست، می‌توان محور اصلی دو دایره را پیدا کرد.*

*) شتینر از این راه نمی‌رود، ولی، به‌کمك تشابه، مسألهٔ B را به مسألهٔ زیر منجر می‌کند: «نقطه‌های برخورد دایرهٔ کمکی را بادایرهٔ دیگری که به‌وسیلهٔ مرکز و شعاع خود داده شده است، پیدا کنید».

دو روش مختلف، برای رسم این محور اصلی، می‌آوریم.

روش اول. O_1 و O_2 را مرکزهای دو دایرهٔ مفروض (شکل ۶۳)، و r_1 و r_2 را شعاع‌های آن‌ها فرض می‌کنیم؛ r_1 و r_2 به‌وسیلهٔ دو پاره خط، که در جاهای دلخواهی قرار گرفته‌اند، داده شده‌اند.

O_1A و O_2B (شکل ۶۳) را عمود بر پاره خط O_1O_2 رسم می‌کنیم (مسألهٔ ۱۱۸)، پاره خط O_1A را برابر r_2 و پاره خط O_2B را برابر r_1 جدا می‌کنیم (مسألهٔ ۱۲۳). نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB را پیدا و، از آن‌جا، عمود MD را بر AB اخراج می‌کنیم؛ این عمود خط‌المرکزین دو دایره را در D قطع می‌کند که روی محور اصلی دو دایره قرار دارد.

اثبات. از شکل ۶۳ نتیجه می‌شود:

$$d_1^2+r_2^2=d_2^2+r_1^2$$

و بنابراین

$$d_1^2-d_2^2=r_1^2-r_2^2$$

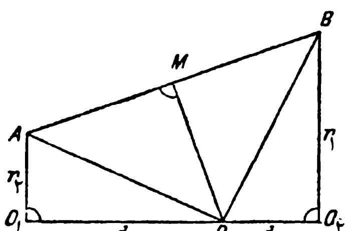
این رابطه نشان می‌دهد که نقطهٔ D برمحور اصلی دو دایره قرار دارد.

روش دوم. از شکل ۹ به دست می‌آید.

۱۲۴. علاوه بر دایرهٔ کمکی، دو دایرهٔ دیگر با مرکزها وشعاع‌های خود داده شده‌اند؛ محور اصلی دو دایرهٔ اخیر را با روش دوم رسم کنید.

۶. اکنون روشن می‌کنیم که‌چگونه می‌توان مسألهٔ A را، با وسیله‌های محدود خود، حل کرد.

دایرهٔ ثابت K را به مرکز O می‌گیریم (شکل ۶۴)؛ به جز آن، نقطهٔ M، پاره خط r و خط راست g هم داده شده است. می‌خواهیم نقطه‌های



شکل ۶۳

X و Y، محل برخورد خط راست g را با دایرهٔ به مرکز M و شعاع r پیدا کنیم.

پاره خط MP را موازی و برابر r (شکل ۶۴) و، سپس، خط راست OP' را موازی خط راست MP رسم می کنیم. در این صورت، نقطهٔ A، مرکز تشابه بیرونی دایره‌های K_1 و K خواهد بود.

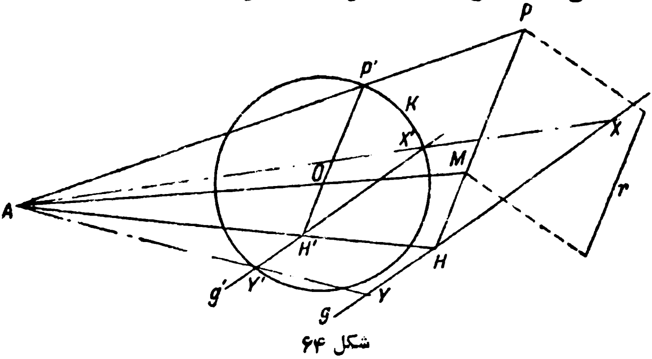
در این دستگاه تشابه، خط راست g' را، متناظر با g، رسم می کنیم؛[85] بلافاصله، نقطه‌های X' و Y' و، از آن‌جا، نقطه‌های X و Y به دست‌می‌آید.

یادداشت. اگر نقطهٔ A در دسترس نباشد و درجایی بیرون از صفحهٔ شکل قرار گیرد، می‌توان شعاع دایرهٔ K را موازی MP، ولی در خلاف جهت‌آن، رسم کرد که، در این صورت، نقطهٔ J، مرکز تشابه درونی دو دایرهٔ K_1 و K به دست می آید.

۷. به این ترتیب، به‌کمک وسیله‌های محدود خود، می‌توانیم مسألهٔ اصلی A را حل کنیم. و این، قضیهٔ شتینر را ثابت‌می کند که: هرمسالهٔ هندسی که به کمک پرگار و خطکش قابل حل باشد، تنها با رسم خطهای راست هم قابل حل است، به شرطی که در صفحهٔ شکل، یک دایرهٔ ثابت و مرکز آن داده شده باشد.[86]

اگر یک مسألهٔ ساختمانی هندسه را بخواهیم به‌کمک وسیله‌های‌محدود خود حل کنیم، ابتدا آن را، با روش عادی و به‌کمک پرگار و خط کش حل می کنیم، سپس، گام به گام، هر بخش از راه‌حل را با وسیله‌های محدود خود، تطبیق می کنیم؛ و ثابت کردیم که چنین‌کاری، همیشه ممکن است.

۸. ولی به‌نظر می‌رسد که، این روش حل مسأله‌ها، به‌کمک وسیله‌های



شکل ۶۴

محدود، در بسیاری موردها، بیش از اندازه مفصل می‌شود. بنابراین، لازم است بتوانیم در مورد مسأله‌هایی که اغلب با آن‌ها رو به رو می‌شویم، راه حل‌های ساده‌تری، به یاری دایرهٔ کمکی پیدا کنیم.

این ساختمان‌های اساسی را مورد بحث قرار می‌دهیم و راه حل آن‌را می‌آوریم و یا، دست کم، به این راه حل‌ها اشاره می‌کنیم.

۱۲۵. رسم یک خط راست، موازی با خط راست مفروض g.

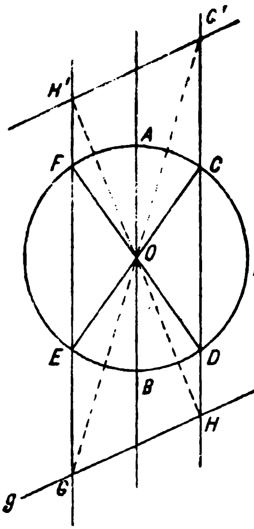
سه حالت را درنظر بگیرید:

۱) g، قطری از دایرهٔ K است؛

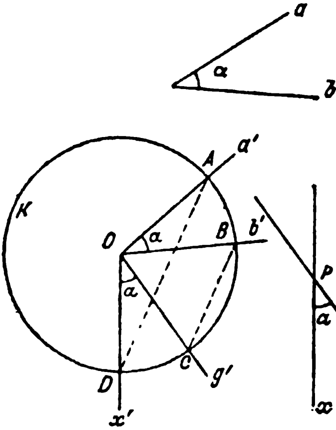
۲) g، دایرهٔ K را در دو نقطهٔ E و F قطع می‌کند؛

۳) g در بیرون دایرهٔ K قرار دارد (شکل ۶۵ راه حل را نشان می‌دهد).

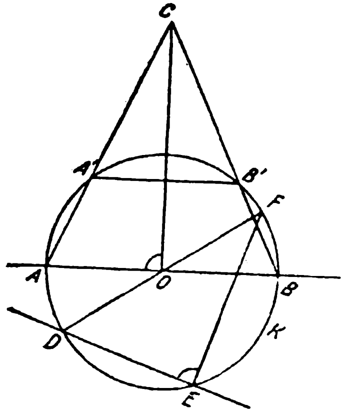
۱۲۶. خط راست g و نقطهٔ P مفروض است. عمودی از نقطهٔ P بر خط راست g رسم کنید. (اگر g، قطر AB از دایرهٔ K (شکل ۶۶) و پاره‌خط $A'B'$ موازی AB باشد، خط راست CO بر g عمود می‌شود. درحالتی هم که g دایرهٔ K را در دو نقطهٔ D و E قطع کند (شکل ۶۶)، وتر FE بر DE عمود است.)



شکل ۶۵



شکل ۶۷



شکل ۶۶

۱۲۷. زاویهٔ α با ضلع‌های a و b، خط راست g و نقطهٔ P مفروض است. می‌خواهیم خط راست x را از نقطهٔ P طوری بگذرانیم که با خط راست g، زاویه‌ای برابر α تشکیل دهد.

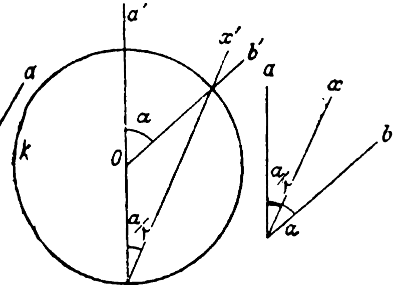
(از نقطهٔ O (شکل ۶۷)، خطهای راست a'، b' و g' را به ترتیب موازی با خطهای راست a، b و g رسم کنید. سپس AD را موازی BC و x را موازی x' بکشید.)

۱۲۸. به جز دایرهٔ کمکی (که در این بند همه جا مفروض است)، زاویهٔ α با ضلع‌های a و b داده شده است. نیمساز x از این زاویه را رسم کنید.

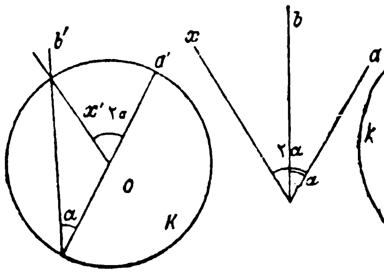
(از نقطهٔ O (شکل ۶۸)، خطهای راست a' و b' را به‌ترتیب موازی با خطهای راست a و b رسم کنید.)

۱۲۹. زاویهٔ مفروض α را دو برابر کنید. (خطهای راست a' و b' را به ترتیب موازی با خطهای راست a و b رسم کنید؛ شکل ۶۹.)

۱۳۰. مثلثی داده شده است که یکی از رأس‌های آن بر محیط دایرهٔ کمکی قرار دارد. می‌خواهیم سه ارتفاع مثلث و مرکز دایره‌های محاطی و محیطی آن را پیدا کنیم.



شکل ۶۸



شکل ۶۹

۱۳۱. دایرهٔ K و دو نقطهٔ A و B مفروض‌اند. اگر K همان دایـرهٔ کمکی باشد، تنها با رسم خطهای راست، مرکز دایره‌هایی را پیدا کنیدکه از A و B بگذرند و بر K مماس باشند.

۱۳۲. سه دایرهٔ $K_۱$، $K_۲$ و $K_۳$ و مـرکـز $O_۱$ از دایـرهٔ $K_۱$ داده شده‌اند. می‌خواهیم با روش ژرگون و تنها با رسم خطهـای راست، مرکز یکی از دایره‌هایی راکه برسه دایرهٔ مفروض مماس است، پیدا کنیم.

۱۳۳. دو دایرهٔ K و $K_۱$ و، به جزآن، مرکز دایرهٔ K داده شده است. مرکز $O_۱$ از دایرهٔ $K_۱$ را تنها با رسم خطهای راست پیدا کنید.

۱۳۴. اگـر به جز محیط یك دایـره، چیز دیگری مفروض نباشد، نمی‌توان تنها با رسم خطهای راست، مرکز آن را پیداکرد. ولـی اگـر، علاوه بـر آن، یك متوازی‌الاضلاع داده شده باشد، می‌توان این مرکز را پیداکرد (چگونه؟)[۸۷]

۱۳۵. اگر مربعی مفروض باشد، لزومی ندارد مرکز دایرهٔ کمکی را بشناسیم. چه چیزی باید به مربع اضافه‌کـرد تـا، درمجموع، شکلی معادل دایرهٔ کمکی شتینر را تشکیل دهد؟

۹. به جـای دایـرهٔ شتینر، می‌توان مقطع مخروطی دیگری، و مثلا بیضی را، مفروض گرفت. به جـز خـود بیضی، باید جـای مرکز و یکی از کانون‌های آن معلوم باشد. مرکز برای رسم خطهای موازی، و کانون برای رسم خطهای عمود بر هم ضرورت دارند.

۱۳۶. پیشنهاد می کنیم. برخی از مسأله‌هـای فوق را، تنها بـا رسم خطهای راست، حل کنید، به شرطی کـه یك بیضی، مرکز آن O و یکی از کانون‌هایش روی صفحهٔ شکل داده شده باشد.

می‌توان خطهای راستی موازی با هر یك از قطرهای بیضی رسم کرد و، سپس، مزدوج قطرها را به دست آورد. اگر بخواهیم خط راست x را، از نقطهٔ O، موازی g رسم کنیم، قطب G از خط راست g را می‌سازیم. خط راست u کـه این قطب را به مرکز وصل می کند، عبارت است از قطبی u، نقطهٔ بی‌نهـایت دور خط راست g. خط راست مجهول x، مـزدوج قطـر u است.

به جای مرکز بیضی، می‌توان متوازی‌الاضلاعی را مفروض گرفت. در حالتی که یك مربع داده شده باشد، وجود خـود بیضی کافی است و نیازی به شناختن مرکز یا کانون آن نیست.

فصل سوم

ساختمان‌های هندسی، به کمک رسم دایره‌ها
(ساختمان‌های ماسکه رونی*)

§۱۴. پیش قضیه

۱. تنها وسیله‌ای که، در این فصل، برای رسم در اختیار داریم، پرگار است.[88] تنها از رسم دایره‌ها باید استفاده کرد؛ هیچ خط راستی وارد در شکل نمی‌شود. البته، برای اثبات درستی رسم، می‌توان از خطهای راست استفاده کرد.

۲. قبل از هر چیز، حکم سادهٔ زیر را ثابت می‌کنیم.

وسط ضلع AB از مثلث مفروض ABC را D و زاویهٔ ADC را α می‌گیریم. از مثلث ADC نتیجه می‌شود:

$$\overline{AC}^{2}=\overline{BD}^{2}+\overline{DC}^{2}-2\overline{AD}\cdot\overline{DC}\ \cos\alpha$$

و از مثلث BCD:

$$\overline{BC}^{2}=\overline{BD}^{2}+\overline{DC}^{2}+2\overline{BD}\cdot\overline{DC}\ \cos\alpha$$

اگر دو برابری را با هم جمع کنیم، با توجه به برابری $\overline{AD}=BD$، خواهیم داشت:

---

*) *Mascheroni*

$$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=2\overline{AD}^2+2\overline{DC}^2$$

این برابری، مضمون حکمی را تشکیل می‌دهد که بارها از آن استفاده خواهیم کرد.

§ ۱۵. تقسیم محیط دایره به بخش‌های برابر

۱. محیط دایره را می‌توان به سادگی، و تنها به کمک پرگار، به شش بخش برابر تقسیم کرد (شکل ۷۱).

قبل از این که به تقسیم دایره به تعداد دیگری از بخش‌های برابر بپردازیم، ابتدا دو مسالهٔ اساسی را حل می‌کنیم: تقسیم کمانی از دایره به دو بخش برابر، و رسم پنج ضلعی و ده ضلعی منتظم محاطی.

۲. نصف کردن کمان AB (شکل‌های a ۷۰ و b ۷۰).

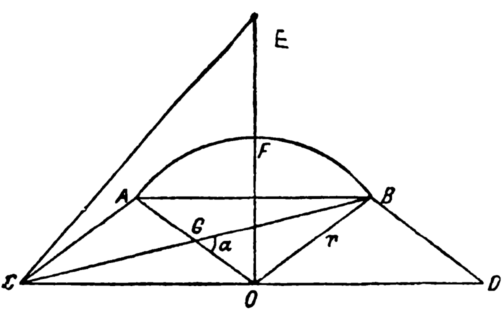
متوازی‌الاضلاع های $ABOC$ و $ABDO$ را می‌سازیم و خط راست CB را رسم می‌کنیم (شکل $a-$۷۰). از پیش قضیهٔ § ۱۴، به دست می‌آید:

$$\overline{AB}^2+\overline{OB}^2=2\overline{AG}^2+2\overline{BG}^2$$

اگر شعاع کمان را r و طول پاره خط AB را d بنامیم، از این رابطه نتیجه می‌شود:

$$\overline{CB}^2=2d^2+r^2$$

در مثلث COF (F وسط کمان AB است)، می‌توان نوشت:



شکل ۷۰ – a

$$\overline{CF}^2 = d^2 + r^2$$

و در مثلث COE:

$$\overline{OE}^2 = d^2 + r^2$$

بنا بر این. $\overline{CF} = \overline{OE}$.

به این ترتیب، اگر بخواهیم تنها به‌کمك پرگار، کمان AB را نصف کنیم، به این ترتیب عمل می‌کنیم (شکل ۷۰ ـ b).

به مرکز هر یك از دو نقطهٔ A و B و به شعاع r و، سپس به مرکز O و شعاع برابر AB کمان‌هایی رسم می‌کنیم. از این راه نقطه‌های C و D به‌دست می‌آیند. کمان‌هایی به مرکزهای C و D وشعاع CB رسم می‌کنیم، نقطهٔ E به‌دست می‌آید. سرانجام، نقطهٔ مجهول F از محل برخورد کمان مفروض AB با دایرهٔ به‌مرکز C یا D و شعاع OE به‌دست می‌آید.

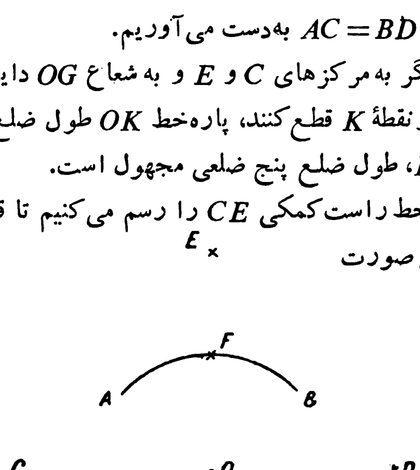
۳. ساختن ضلع‌های پنج ضلعی منتظم.

اگر بخواهیم ضلع یك پنج ضلعی یا ده ضلعی منتظم محاط در دایره را به دست آوریم (شکل ۷۱)، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

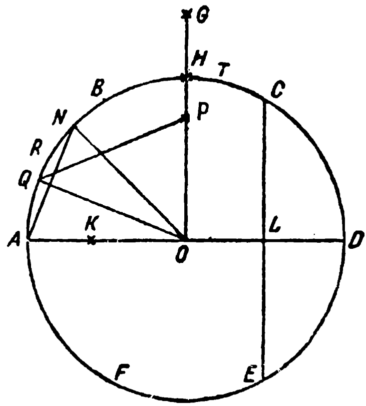
ابتدا رأس‌های A، B، C، D، E و F از شش ضلعی محاطی را پیدا می‌کنیم؛ سپس، نقطهٔ G را به عنوان محل برخورد دو دایرهٔ به‌مرکزهای A و D و به شعاع $AC = BD$ به‌دست می‌آوریم.

اکنون اگر به‌مرکزهای C و E و به شعاع OG دایره‌هایی رسم کنیم تا یکدیگر را درنقطهٔ K قطع کنند، پاره‌خط OK طول ضلع ده ضلعی مجهول و پاره خط KH، طول ضلع پنج ضلعی مجهول است.

اثبات. خط راست کمکی CE را رسم می‌کنیم تا قطر AD را در L قطع کند. دراین صورت



شکل ۷۰ ـ b



شکل ۷۱

$$\overline{AC}=r\sqrt{۳}\ ,\quad \overline{OG}=\overline{AH}=r\sqrt{۲}=\overline{CK}\ ,\ \overline{LC}=\frac{r}{۲}\sqrt{۳}$$

که از آن جا نتیجه می‌شود:

$$\overline{KL}=\frac{r}{۲}\sqrt{۵}\ ,\quad \overline{KO}=\frac{r}{۲}\sqrt{۵}-\frac{r}{۲}=c_{۱۰}$$

به این ترتیب، KO برابر است با طول ضلع ده ضلعی منتظم محاطی. در نتیجه، بنا بر قضیهٔ معروف هندسه ($c_۵^۲=r^۲+c_{۱۰}^۲$)، HK هم برابر با ضلع پنج ضلعی منتظم محاطی می‌شود.

۱۳۷. محیط دایره‌ای را به شش بخش برابر و به دو بخش برابر تقسیم کنید؛ سپس به پنج و ده بخش برابر و هم، به چهار بخش برابر تقسیم کنید (با تکیه بر دو مسالهٔ اساسی).

۱۳۸. محیط دایره‌ای را به هشت بخش برابر تقسیم کنید.

این مساله، منجر به‌نصف کردن یك‌چهارم محیط دایره می‌شود (**۱۳۷**). ولی راه‌حل دومی هم وجود دارد. $\overline{GN}=\overline{ON}=r$ را جدا می‌کنیم (شکل ۷۱)؛ N کمان AH را نصف می‌کند، زیرا مثلث ONG قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است، به‌نحوی که زاویهٔ AON برابر ۴۵ درجه می‌شود.

اگر این پاره خط‌ها را بسازیم (شکل ۷۱):

$$\overline{PH}=\overline{AO} \quad \text{و} \quad \overline{AP}=\overline{DP}=\overline{RG}$$

آن وقت پاره خط OP بـرابـر با ضلع هشت ضلعی منتظم محاطی می‌شود، یعنی برابر است با AN.

اثبات. $OG=R\sqrt{۲}$.[۸۹] بنابراین از مثلث قائم‌الزاویهٔ AOP نتیجه می‌شود:

$$\overline{OP}=r\sqrt{۲-\sqrt{۲}}=c_{۸}$$

۱۳۹. محیط دایره را به شانزده بخش برابر تقسیم کنید.

برای این منظور، می‌توان کمان یك هشتم دایره را نصف کرد (براساس مسالهٔ اساسی ۲) و یا به ترتیب زیر عمل کرد:

نقطهٔ P را، طبق مسالـهٔ **۱۳۸** می‌سازیـم (شکل ۷۱) و نقطهٔ Q را طوری پیدا می‌کنیم که داشته باشیم:

$$\overline{QP}=\overline{AO}=r$$

دراین صورت، $\overline{AQ}$ ضلع شانزده ضلعی منتظم محاطی خواهد بود.

اثبات. دو مثلث OQP و ANO برابرند، زیرا $\overline{AN}=\overline{OP}$ و

$$\overline{AO}=\overline{NO}=\overline{QO}=\overline{QP}=r$$

بنابراین : $\widehat{ANO}=\widehat{QOP}=\frac{۳}{۴}R$ ،°۹ به نحوی که $\widehat{AOQ}=\frac{۱}{۴}R$.

۱۴۰. محیط دایـره را بـه ۱۲، ۲۴، ۴۸، ۱۵، ۲۰، ۱۲۰ و ۲۴۰ بخش برابر تقسیم کنید.

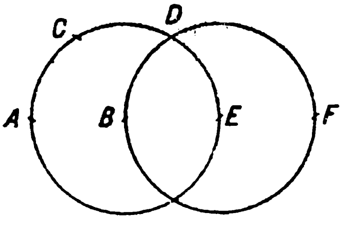
باید توجه کرد:

$$\frac{u}{۳}-\frac{u}{۴}=\frac{u}{۱۲};\quad ۲\frac{u}{۵}-\frac{u}{۳}=\frac{u}{۱۵};\quad \frac{u}{۱۲}-\frac{u}{۱۶}=\frac{u}{۴۸};\quad \frac{u}{۴}-\frac{u}{۵}=\frac{u}{۲۰};$$

$$\frac{u}{۸}-\frac{u}{۱۲}=\frac{u}{۲۴};\quad ۵\frac{u}{۲۴}-\frac{u}{۵}=\frac{u}{۱۲۰};\quad ۵\frac{u}{۴۸}-\frac{u}{۱۰}=\frac{u}{۲۴۰}.$$

§۱۶. ضرب و تقسیم پاره‌خط‌ها

۱۴۱. می‌خواهیم، با معلوم بودن دو انتهای پاره‌خط AB، آن را دوبرابر یا چند برابر کنیم.



شکل ۷۲

به‌مرکز B وشعاع AB دایره‌ای رسم می‌کنیم و روی محیط آن

$$\overline{AC}=\overline{CD}=\overline{DE}\,(=\overline{AB})$$

را جدا می‌کنیم. (شکل ۷۲) در این‌صورت

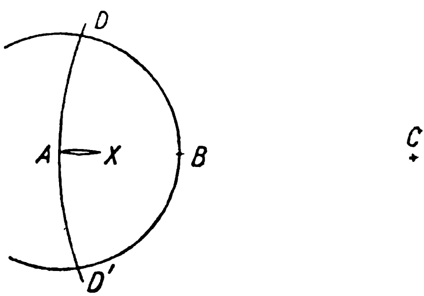
$$\overline{AE}=2\overline{AB}$$

۱۴۲. پاره خط s، به وسیلهٔ دو انتهای آن، A و B، داده شده است. می‌خواهیم آن را به n بخش برابر تقسیم کنیم.

ماسکه رونی، برای حل این مسالهٔ اساسی، دو روش داده است که، البته، می‌توان یکی را به دیگری منجر کرد.

روش اول. ابتدا $\overline{AC}=n\cdot\overline{AB}$ را می‌سازیم (شکل ۷۳) و، سپس، دایره‌های $A(B)$ و $C(A)$* را رسم می‌کنیم که، در نتیجه، نقطه‌های D و D' به دست می‌آیند. دایره‌های $D(A)$ و $D'(A)$ یکدیگر را در نقطهٔ X قطع می‌کنند که، برای آن، داریم:

$$\overline{AX}=\frac{1}{n}\overline{AB}$$



شکل ۷۳

*) دایره‌ای را که به‌مرکز M رسم کرده باشیم، به نحوی که از نقطهٔ P بگذرد، با نماد $M(P)$ نشان می‌دهیم.

اثبات. ازمتقارن بودن تمامی شکل نتیجه‌می شود که،نقطهٔ X، برخط راست AC قرار دارد.

دو مثلث متساوی‌الساقین AXD و ADC متشابهند، به‌نحوی که

$$\overline{AX}:\overline{AD}=\overline{AD}:\overline{AC}$$

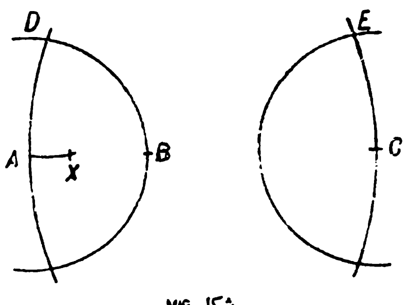
چون پاره خط $\overline{AD}$ (کــه با $\overline{AB}$ برابر است) برابر با $\frac{1}{n}\overline{AC}$ است، بنابراین

$$\overline{AX}=\frac{1}{n}\overline{AB}$$

روش دوم. مثل قبل، پاره خط $\overline{AC}$ را برابر $n.\overline{AB}$ می‌سازیم (شکل ۷۴)؛ سپس دایــره‌هــای $A(B)$، $A(C)$، $C(A)$ و $C(E)$ را رسم می‌کنیم (دایرهٔ اخیر را به شعاع برابر $\overline{AB}$). اکنون اگر به‌مرکز C و به شعاع $\overline{ED}$ دایره‌ای رسم کنیم، دایــرهٔ $D(A)$ را در نقطهٔ X قطع می‌کند و در ضمن: $\overline{AX}=\frac{1}{n}\overline{AB}$.

اثبات. خط راست CX با خط راست DE و، بنا بــرایــن، با خط راست AC موازی است. به این ترتیب، نقطهٔ X، محل برخورد دایرهٔ $D(A)$ با خط راست AC، یعنی منطبق برهمان نقطهٔ X است که با روش اول به‌دست آورده بودیم.

وقتی که نقطهٔ X به‌دست آید، با تکرار طول پاره‌خط AX، می‌توان



شکل ۷۴

همهٔ نقطه‌های تقسیم پاره‌خط مفروض را، به‌دست‌آورد.

۱۴۳. پاره خط مفروض AB را به دو، چهار، هشت، . . . بخش برابر تقسیم کنید.

این مسالـه، حالت خاصی از مسالـهٔ قبل است، ولی ماسکه‌رونی، دو روش زیبای دیگر هم در این مورد دارد.

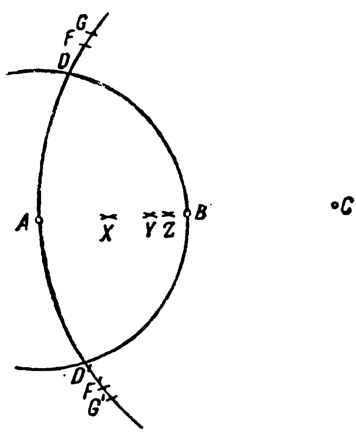
روش اول. پاره‌خط AB را دو بـرابـر می‌کنیم (شکل ۷۵)، سپس دایره‌های $A(B)$، $C(A)$، $D(A)$ و $D'(A)$ رارسم می‌کنیم و، به‌این‌ترتیب، نقطهٔ X وسط پاره‌خط AB را به‌دست می‌آوریم (**۱۴۲**).

سپس، اگر $\overline{AF'}=\overline{DF'}=\overline{BD}$ را جدا کنیم، آن وقت، دایره‌های $F(A)$ و $F'(A)$ در نقطهٔ Y یکدیگر را قطع می‌کنند که وسط پاره‌خط XB است.

اکنون، اگر $\overline{AG}=\overline{AG'}=\overline{BF}$ رابسازیم، دایره‌های $G(A)$و$G'(A)$ یکدیگر را در نقطهٔ Z قطع می‌کنندکـه وسط پـاره‌خط YB است و غیره. ساختمان را می‌توانیم، هرچند بارکه بخواهیم، تکرارکنیم.

اثبات. X وسط پاره‌خط AB است. بنابراین، طبق پیش قضیهٔ §۱۴ داریم (شکل ۷۵):

$$\overline{AD}^{۲}+\overline{BD}^{۲}=۲\overline{AX}^{۲}+۲\overline{XD}^{۲}$$



شکل ۷۵

از این جا، اگر AB را برابر s بگیریم، نتیجه می‌شود:

$$\overline{BD}^{۲}=\frac{۳}{۲}s^{۲}$$

از تشابه دو مثلث متساوی‌الساقین AFY و ACF داریم:

$$\overline{AY}:\overline{AF}=\overline{AF}:\overline{AC}$$

ولی چون $\overline{AF}^{۲}=\overline{BD}^{۲}=\frac{۳}{۲}s^{۲}$ و $\overline{AC}=۲s$، بنابراین

$$AY=\frac{۳}{۴}s$$

یعنی

$$XY=\frac{۱}{۴}s$$

به‌این ترتیب، Y وسط پاره‌خط XB است.

اگر به‌همین ترتیب، به‌کمك پیش قضیهٔ ۱۴§، طول پاره‌خط

$$\overline{BF}=\overline{AG}$$

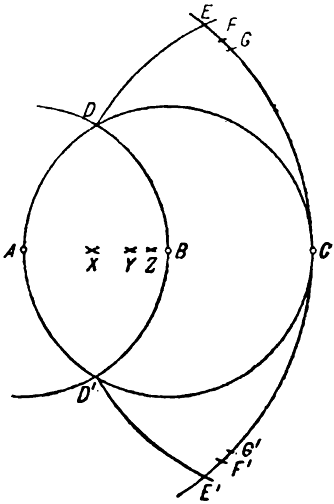
را محاسبه کنیم، از تشابه دومثلث AGZ و ACG، برای طول پاره‌خط YZ، مقدار $\frac{۱}{۸}s$ به‌دست می‌آید و غیره.

روش دوم. AB را پاره‌خطی می‌گیریم که می‌خواهیم آن‌را تقسیم کنیم. $\overline{AC}=۲\overline{AB}$ را بـه کمك دایـرهٔ $B(A)$ می‌سازیـم (شکل ۷۶) و دایره‌های $A(B)$، $A(C)$ و $C(D)$ را رسـم می کنیـم؛ نقطه‌هـای E و E' به‌دست می‌آیند. اکنون اگر

$$\overline{XE}=\overline{XE'}=\overline{CD}$$

را جدا کنیم، نقطهٔ X وسط پاره‌خط AB خواهد بود،

سپس، اگر



شکل ۷۶

$$\overline{CF}=\overline{CF'}=\overline{BE} \text{ و } \overline{FY}=\overline{F'Y}=\overline{BE}$$

را جدا کنیم، نقطهٔ Y وسط پاره‌خط XB به‌دست‌می‌آید. به‌همین ترتیب، اگر

$$\overline{CG}=\overline{CG'}=\overline{BF} \text{ و } \overline{GZ}=\overline{G'Z}=\overline{BF}$$

را در نظر بگیریم، نقطهٔ Z وسط پاره‌خط YB می‌شود و غیره.

اثبات. از تشابه دومثلث متساوی‌الساقین XEC و CAE (شکل ۷۶) نتیجه می‌شود:

$$\overline{XC}:\overline{CE}=\overline{CE}:\overline{AC}$$

که اگر AB را برابر s بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$\overline{CE}=\overline{CD}=s\sqrt{۳}$$

و از آن‌جا

$$\overline{XC}=\frac{۳}{۲}s$$

یعنی نقطهٔ X وسط پاره‌خط AB است.

برای این کـه همین ویژگی را برای نقطهٔ Y ثابت‌کنیم، ابتدا طول پاره‌خط BE را محاسبه می‌کنیم.

به‌کمك پیش قضیهٔ §۱۴ به دست می‌آید:

$$\overline{AE}^{۲}+\overline{EC}^{۲}=۲\overline{AB}^{۲}+۲\overline{BE}^{۲}$$

که اگر توجه‌کنیم: $\overline{AE}=۲s$، $\overline{CE}=\overline{DC}=s\sqrt{۳}$، خواهیم داشت:

$$\overline{BE}^{۲}=\overline{CF}^{۲}=\frac{۵}{۲}s^{۲}$$

از تشابه دو مثلث متساوی‌الساقین YFC و CAF نتیجه می‌شود:

$$\overline{YC}:\overline{CF}=\overline{CF}:\overline{AC}$$

که با قرار دادن مقداری‌که برای $\overline{CF}$ به‌دست‌آوردیم:

$$YC=\frac{۵}{۴}s$$

یعنی نقطهٔ Y وسط پاره‌خط XB است.

برای اثبات ویژگی مشابه نقطهٔ Z، ابتدا طول BF را به‌کمك پیش‌قضیهٔ §۱۴ بـه‌دست می‌آوریـم. سپس، از تشابه مثلث‌های ZGC و CAG نتیجه می‌شودکه Z وسط پاره‌خط YB است و غیره.

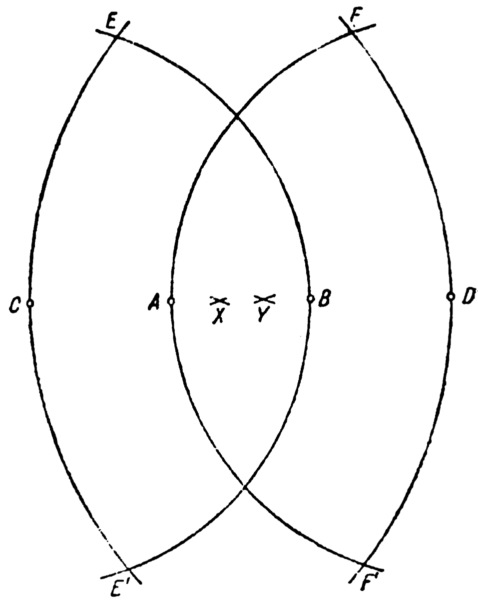
۱۴۴. پاره‌خط مفروض را به سه بخش برابر تقسیم کنید.

در مورد این مساله هم، ماسکه‌رونی روش زیبایی داردکـه آن را از روش عادی و عمومی ممتاز می‌کند.

ابتدا $\overline{AC}=\overline{AB}=\overline{BD}$ را مـی‌سازیم (شکل ۷۷)، سپس دایره‌های $C(B)$،$C(D)$، $D(C)$ و $D(A)$ را رسم می‌کنیم. از این راه نقطه‌هـای E، E' و F، F' به دست می‌آید. اکنون اگر

$$\overline{XE}=\overline{XE'}=\overline{YF}=\overline{YF'}=\overline{CB}$$

را جدا کنیم، نقطه‌های X و Y پـاره خط AB را به سه بخش برابر تقسیم می‌کنند.



شکل ۷۷

اثبات. از تشابه‌دومثلث متساوی‌الساقین CXE و CDE نتیجه‌می‌شود:

$$\overline{CX} : \overline{CE} = \overline{CE} : \overline{DC}$$

سپس

$$\overline{CE} = ۲\overline{AB}، \qquad \overline{CD} = ۳\overline{AB}$$

بنابراین

$$\overline{CX} = \frac{۴}{۳}\overline{AB} \Rightarrow \overline{AX} = \frac{۱}{۳}\overline{AB}$$

§۱۷. جمع و تفریق پاره‌خط‌ها. رسم موازی‌ها و عمودها

۱۴۵. پاره‌خط مفروضی را بـه اندازهٔ پاره‌خط مفروض دیگری بزرگ یا کوچك کنید.

فرض کنید دو انتهای پاره‌خط‌های AB و CD در دست باشد.

به مرکز A و به شعاع پاره‌خط CD دایرهٔ K را رسم (شکل ۷۸) و نقطه‌های برخوردآن را با دایرهٔ دلخواه K_1 به‌مرکز B پیدا می‌کنیم. ازاین راه نقطه‌های E و E' به‌دست می‌آید. اگرهریك از دو کمان EE' را نصف کنیم تا نقطه‌های X و Y به‌دست‌آید، پاره‌خط BX برابر مجموع وپاره‌خط BY برابر تفاضل دو پاره‌خط مفروض خواهد بود.

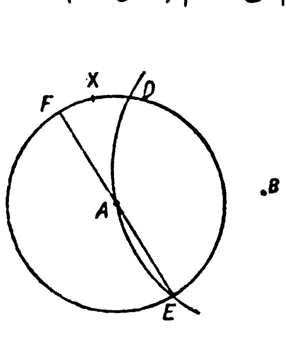
۱۴۶. از نقطهٔ A عمودی بر پاره‌خط AB (که دو انتهای آن مفروض است) رسم کنید، یعنی نقطهٔ دیگر X از این عمود را پیدا کنید.

دو دایرهٔ دلخواه، ولی با شعاع‌های برابر، یکی به مرکز A و دیگری به مرکز B رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد دو دایره را C می‌نامیم. اکنون اگر دایرهٔ $C(B)$ را رسم و پاره‌خط BC را دو برابر کنیم، نقطهٔ X از عمود مجهول به دست می‌آید. در واقع، نقطهٔ X روی قطر دایرهٔ $C(B)$، که از نقطه‌های A و B می‌گذرد، قرار دارد.

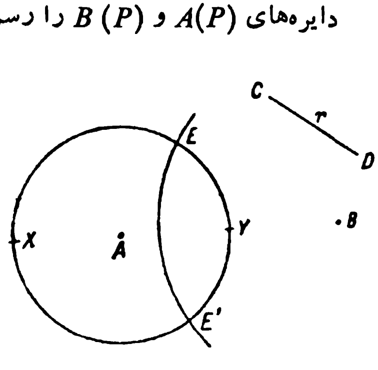
اگربخواهیم عمودمجهول، طول معلومی برابر s داشته باشد، به‌مرکز A و به شعاع s دایرهٔ K را رسم می‌کنیم (شکل ۷۹)، سپس نقطه‌های D و E برخورد این دایره با دایرهٔ $B(A)$ را به‌دست می‌آوریم. اکنون اگرنقطهٔ F واقع بر دایرهٔ K را طوری پیدا کنیم‌که با نقطه‌های A و E بر یك خط راست باشد، آن‌وقت، وسط کمان FD، همان نقطهٔ مجهول X است.

۱۴۷. ازنقطهٔ مفروض P، عمودی برخط‌راست مفروض AB فرودآورید.

دایره‌های $A(P)$ و $B\ (P)$ را رسم می‌کنیـم (شکل ۸۰). نقطهٔ دیگر



شکل ۷۹



شکل ۷۸

برخورد این دو دایـره، یعنی نقطهٔ X، روی عمود مجهول قرار دارد و، در ضمن، قرینهٔ P نسبت به AB است.

۱۴۸. خط راستی پیدا کنید کـه با خط مفروض مـوازی باشد و از نقطهٔ مفروض بگذرد.

خط راست AB و نقطهٔ P را مفروض می‌گیریم. به‌مرکز P و به‌شعاع AB دایره‌ای رسم می‌کنیم (شکل ۸۱)، سپس دایرهٔ دیگری به‌مـرکـز B و شعاع AP. نقطهٔ X، محل برخورد این دو دایره، روی خط موازی مجهول قرار دارد.

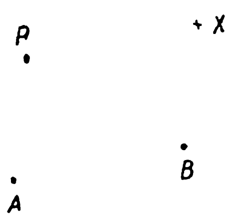
§۱۸. رسم پاره‌خط‌های متناسب

۱۴۹. با مفروض بودن پاره‌خط‌های a،b و c، می‌خواهیم جزء چهارم تناسب راپیدا کنیم، یعنی‌پاره‌خط x را طوری به‌دست‌آوریم‌که باپاره‌خط‌های مفروض، یك تناسب تشکیل دهد:

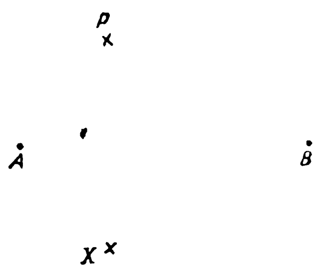
$$a:b=c:x$$

استدلال زیر روشن می‌کندکه، تنها به‌کمك‌پرگار، می‌توان این مساله را حل کرد.

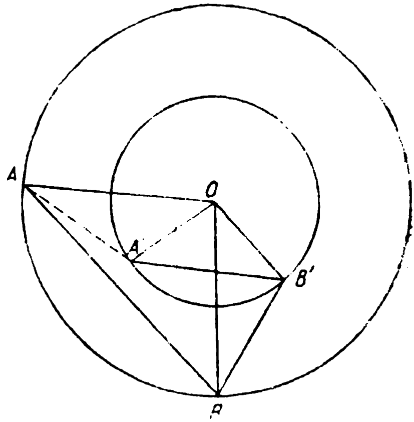
دو دایرهٔ هم مرکز به مرکز O رسم (شکل ۸۲) و، $\overline{AA'}=\overline{BB'}$ را جدا می‌کنیم. در این صورت، دو مثلث AOA' و BOB' برابر و ازآن‌جا، دو مثلث AOB و $A'OB'$ متشابه می‌شوند و داریم:



شکل ۸۱



شکل ۸۰



شکل ۸۲

$$\overline{OA}:\overline{OA'}=\overline{AB}:\overline{A'B'}$$

بنابراین، اگردایره‌های هم‌مرکز را به شعاع‌های a و b رسم، پاره‌خط AB را بـه اندازهٔ c و پاره‌خط‌های AA' و BB' را برابر هم و به اندازهٔ پاره‌خطی دلخواه جدا کنیم، آن وقت پاره‌خط $A'B'$ همان پاره‌خط مجهول x خواهد بود که در تناسب موردنظر صدق می‌کند.

اگر پاره‌خط c آن‌قدر بزرگ باشد کـه نتوان آن را روی وتری از دایرهٔ $O(A)$ جدا کرد، به جای آن، پاره‌خط $\frac{c}{n}$ را جدا می‌کنیم (n، عددی طبیعی است) کـه، البته در ایـن صورت، بـه جای پاره‌خط x، پاره‌خط $\frac{x}{n}$ به دست می‌آید.

۱۵۰. بامعلوم بودن پاره‌خط‌های a و b، جزءسوم تناسب را بسازید، یعنی این تناسب را حل کنید:

$$a:b=b:x$$

این مساله را هم با همان روش مسالـهٔ قبل می‌تـوان حل‌کرد. ولی ماسکه‌رونی راه‌حل دیگری هم داده است که ما آن را در این جا می‌آوریم. دایره‌ای به مرکز O و شعاع a رسم می‌کنیم (شکل ۸۳)؛ نقطهٔ‌دلخواه

O_1 را روی محیط این دایره انتخاب و به مـرکـز آن و به شعاع b، دایرهٔ ABC را رسم مـی‌کنیم. در ضمن، نقطهٔ C را طوری در نظر می‌گیریم که کمان AC، برابر نصف محیط دایره باشد.

دو زاویهٔ α و α' در شکل ۸۳ با هم برابرند، زیرا مجموع هرکدام از آن‌ها با 2β بـرابـر ۱۸۰ درجه می‌شود. از این جا دو مثلث CO_1B و BO_1O متشابه می‌شوند و داریم:

$$\overline{O_1O} : \overline{BO_1} = \overline{BO_1} : \overline{BC}$$

یا

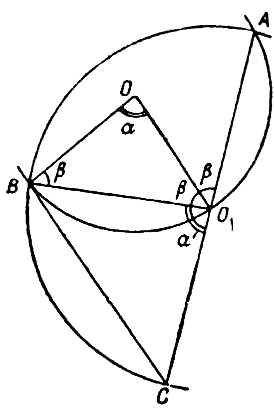
$$a : b = b : x$$

به این تـرتیب، پاره‌خط BC، جملهٔ سوم یك تصاعد هندسی است که دو جملهٔ اول آن پاره‌خط‌های a و b باشند.[91]

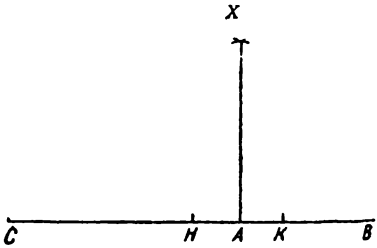
۱۵۱. واسطهٔ هندسی دو پاره‌خط مفروض را بسازید.

باید x را از تناسب $a : x = x : b$ پیدا کنیم. ماسکه‌رونی، برای حل این مساله، دو روش مختلف آورده است.

روش اول. $\overline{AB} = a$ و $\overline{AC} = b$ بگیرید. نقطهٔ H وسط پاره‌خط BC را معین و نقطهٔ K را طوری پیدا می‌کنیم که برابری $\overline{KA} = \overline{AH}$ برقرار باشد. اکنون اگر دایره‌هایی به شعاع HB و به‌مـرکـزهای H و K رسم



شکل ۸۳



شکل ۸۴

کنیم، در نقطه‌ای مثل X یکدیگر را قطع می‌کنند. پاره‌خط XA، واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط a و b است.

در واقع، نقطهٔ X روی محیط دایرهٔ به‌مرکز H و به قطر $a+b$ قرارا درد.

روش دوم. $\overline{AB}=a$ و $\overline{AC}=b$ را جدا می‌کنیم (شکل۸۵). سپس، پاره خط $\overline{AB}$ را درنقطهٔ H نصف و $\overline{KC}=\overline{CH}$ را می‌سازیم.

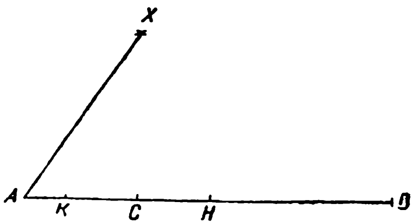
اکنون اگر به مرکزهای H و K و به شعاع HA دایره‌هایی رسم کنیم، در نقطه‌ای مثل X یکدیگر را قطع می‌کنند.

پاره‌خط AX، همان واسطهٔ هندسی مجهول است. در واقع، نقطهٔ X بر نیم دایره‌ای قرار دارد که مرکز آن H و قطر آن AB است.

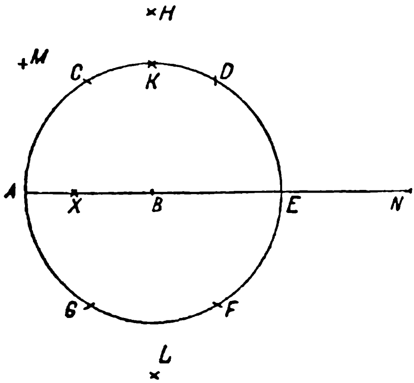
۱۵۲. تقسیم طلایی پاره خطAB.

دایرهٔ به مرکز B (شکل ۸۶) و به شعاع AB را رسم و، سپس، راس‌های C،D،E،FوGازشش‌ضلعی منتظم محاطی و نقطهٔ H، محل برخورد دو دایرهٔ $A(D)$ و $E(C)$ را پیدا می‌کنیم.

اکنون اگر نقطهٔ X را طوری بسازیم که داشته باشیم:



شکل ۸۵



شکل ۸۶

$$\overline{XD}=\overline{XF}=\overline{BH}$$

آن‌وقت نقطهٔ X، پاره‌خط AB را به‌نسبت طلائی تقسیم می‌کند؛ زیرا پاره‌خط XB (بنا بر §۱۵، ۲)، ضلع ده ضلعی منتظم محاطی است.

۱۵۳. جذر یك پاره‌خط.

اگر فرض کنیم $\overline{AB}=1$ (شکل ۸۶)، آن‌وقت

$$\overline{BH}=\sqrt{2},\qquad \overline{AD}=\sqrt{3},\qquad \overline{AE}=\sqrt{4}=2$$

سپس، اگر نقطهٔ M را طوری پیدا کنیم که داشته باشیم:

$$\overline{MA}=\overline{MK}=\overline{AB}$$

آن‌وقت

$$\overline{ME}=\sqrt{5}$$

اگر پاره‌خط AE را تا نقطهٔ N روی امتداد AB طوری پیدا کنیم که داشته باشیم:

$$\overline{ND}=\overline{NF}=\overline{DA}$$

آن‌وقت

$$\overline{HN}=\sqrt{6},\qquad \overline{CN}=\sqrt{7}$$

اکنون اگر نقطهٔ L را به عنوان نقطهٔ برخورد دایره‌های $A(F)$ و $E(G)$ به دست آوریم، آن وقت

$$\overline{LH}=\sqrt{۸},\qquad \overline{AN}=\sqrt{۹},\qquad \overline{MN}=\sqrt{۱۰}$$

یادداشت. به کمك ریشهٔ دوم عددهای طبیعی از ۱ تا ۱۰، می‌توان به سادگی، ریشهٔ همهٔ عددهای طبیعی تا ۳۶ را به دست آورد. مثلاً، اگر بخواهیم $\sqrt{۲۳}$ را پیدا کنیم، فرض می کنیم:

$$۲۳=۲۵-۲$$

به‌نحوی که

$$(\sqrt{۲۳})^{۲}=۵^{۲}-(\sqrt{۲})^{۲}$$

اکنون اگر مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنیم که وتر آن برابر ۵ و یکی از ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمه آن برابر $\sqrt{۲}$ باشد، آن وقت، پاره خط به طول $\sqrt{۲۳}$ به دست می‌آید.

۱۵۴. اگر ریشهٔ دوم عددهای طبیعی تا ۳۶ معلوم باشد، آن وقت می‌توان ریشهٔ دوم همهٔ عددهای طبیعی تا ۳۶۱ را به‌دست‌آورد (در این جا هم می‌توان شبیه مسالهٔ قبل استدلال کرد).

اگر بخواهیم ریشهٔ دوم یك کسر مثبت و گویا را به‌دست‌آوریم، یعنی $\sqrt{\frac{m}{n}}$ را بسازیم، فرض می‌کنیم:

$$\sqrt{\frac{m}{n}}=\frac{۱\times\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$$

اکنون روشن است که، برای ساختن $\sqrt{\frac{m}{n}}$، باید x را در تناسب زیر به‌دست آورد

$$۱:\sqrt{n}=x:\sqrt{m}$$

§۱۹. برخورد خط راست با دایره و با خط راست. ضرب و تقسیم زاویه‌ها

۱۵۵. مطلوب است نقطه‌های برخورد یك دایرهٔ مفروض، با خط راستی که به وسیلهٔ دو نقطهٔ آن داده شده است.

دایرهٔمفروض را K ودونقطهٔ مفروض ازخطراست را A وBمی‌نامیم. دایرهٔ K_1، قرینهٔ دایرهٔ K را نسبت به خط راست AB می‌سازیم (شکل۸۷)؛ این دودایره، یکدیگر را در نقطه‌های مجهول X وYقطع می‌کنند.

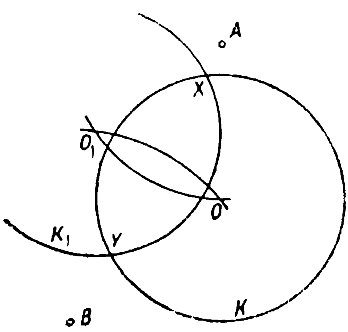
اگر خط راست مفروض، از مرکز دایرهٔ K گذشته باشد، به مرکز نقطهٔ A، دایرهٔ H را به شعاع دلخواه رسم می‌کنیم؛ این دایره، دایرهٔ K را در نقطه‌های B' و B'' قطع می‌کند. اگر کمان‌های $B'B''$ از دایرهٔ K را نصف کنیم، نقطه‌های مجهول X و Y به‌دست می‌آیند.

۱۵۶. هریك از دو خط راست AB و CD به وسیلهٔ دو نقطهٔ خود داده شده‌اند، فقط با رسم دایره، نقطهٔ برخوردآن‌ها را پیدا کنید.

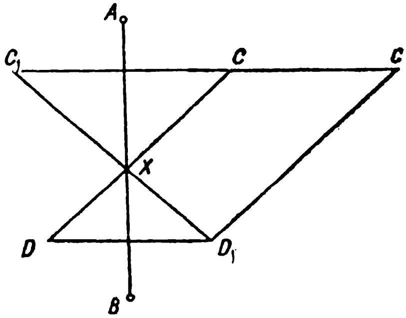
قرینهٔ نقطه‌های C وD را نسبت به‌خط راست AB پیدا می‌کنیم. به‌این ترتیب، خط راست C_1D_1 به دست می‌آیدکه از همان نقطهٔ مجهول X می‌گذرد. اکنون نقطهٔ C'' را طوری پیدا می‌کنیم که داشته باشیم:

$$\overline{CC''}=\overline{DD_1} \quad \text{و} \quad \overline{D_1C''}=\overline{DC}$$

در این صورت D_1C'' موازی با DC می‌شود و، بنابراین، خواهیم داشت:



شکل ۸۷



شکل ۸۸

$$\overline{C_1X} : \overline{C_1D_1} = \overline{C_1C} : \overline{C_1C''}$$

اکنون اگر جزء چهارم تناسب را برای پاره‌خطهای C_1C''، C_1C و C_1D_1 بسازیم و آن را روی خط راست C_1D_1 از نقطهٔ C_1 جدا کنیم (مسالهٔ ۱۴۵)، نقطهٔ مجهول X به‌دست خواهدآمد.

۱۵۷. انتقال زاویه.

زاویهٔ α بـه‌وسیلـهٔ سه نقطهٔ A، B و C داده شده است (شکل ۸۹)؛ به‌جزآن دونقطهٔ دیگر E و D هم مفروض‌اند. می‌خواهیم نقطهٔ X را طوری پیدا کنیم که داشته باشیم:

$$\widehat{XED} = \widehat{CBA}$$

مثلث‌های ABC و DEX متشابه‌اند، بنابراین داریم:

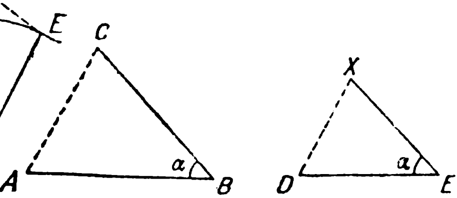
$$\overline{XD} : \overline{DE} = \overline{CA} : \overline{AB} \text{ و } \overline{XE} : \overline{DE} = \overline{CB} : \overline{AB}$$

بنابراین، پاره‌خطهای XD و XE را می‌توان، بـه عنوان جزء چهارم یك تنـاسب ساخت، ازآن جا، نقطهٔ مجهول X و زاویهٔ α به دست می‌آید.

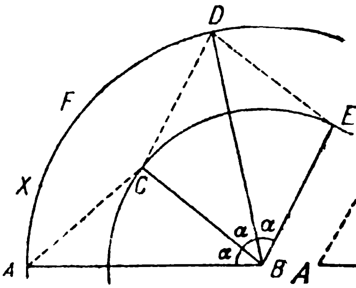
۱۵۸. زاویهٔ مفروض را دو یا چند برابر، یا نصف کنید.

فرض کنید زاویه α به‌وسیلهٔ سه نقطهٔ A، B و C داده شده باشد (شکل ۹۰). دایره‌های $B(A)$ و $B(C)$ را رسم و این پاره‌خطها را جدا می‌کنیم:

$$\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \ldots$$



شکل ۸۹



شکل ۹۰

در این صورت

$$\widehat{DBA}=۲\alpha، \quad \widehat{EBA}=۳\alpha، \ldots$$

برای تقسیم زاویه بــه دو بخش برابر، می‌توان از روش‌های مختلفی استفاده کرد، مثلاً روش زیر:

دایــره‌های $B(A)$ و $B(C)$ را رسم مــی کنیم و نقطهٔ D را به دست می آوریم. سپس، نقطهٔ F وسط کمــان AD و نقطهٔ X وسط کمان AE را پیدا می کنیم.

§۲۰. کار برد اصل شعاع‌های معکوس، در حل مساله‌های ساختمانی درجه دوم، تنها به‌کمك پرگار

ساختمان‌هایی که ماسکه‌رونی در کتاب پرحجم خودمطرح کرده است، بی‌اندازه زیبا هستند، ولی هر کسی که کتاب او را می‌خواند، بــه این فکر می‌افتد که اصلی کلی برای به‌دست آوردن این ساختمان‌ها و یا ساختمان‌های مشابه پیدا کند.

در اینجا ثابت خواهیم کرد که، اصل‌های شعاع‌های معکوس،می‌تواند ما را به‌چنین هدفی برساند.

۱. پیدا کردن منعکس یك نقطه، تنها به کمك پرگار.

اگر K دایره‌ای به شعاع r و P نقطهٔ دلخـواهی واقع بر صفحهٔ این دایره باشد، همان‌طور که می‌دانیم، منعکس آن نقطهٔ P'، بر نقطهٔ برخورد خط مرکزی PO با قطبی نقطهٔ P نسبت به‌دایرهٔ K واقع است. ضمناً، رابطهٔ زیر هم برقرار است:

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^{۲}$$

اگر نقطهٔ P روی خط راستی حرکت کند، منعکس آن نقطهٔ P'، روی دایره‌ای حرکت می‌کند که از نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ K گذشته است. درحالتی که نقطهٔ P روی محیط دایرهٔ A حرکت کند، نقطهٔ P' دایـره‌ای مثل A' را طی می‌کند، به‌نحوی که نقطهٔ O، مرکزتشابه‌بیرونی دو دایرهٔ A و A' است.

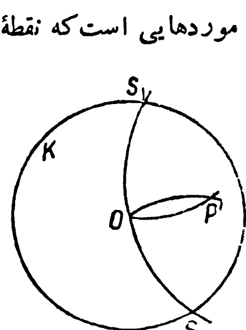
در این جا می‌خواهیم، بـا مفروض بودن نقطهٔ P، منعکس آن P' را، به‌کمك پرگار پیدا کنیم.

دایرهٔ $P(O)$ را رسم می‌کنیم کـه دایرهٔ K را در نقطه‌های $S_۱$ و $S_۲$ قطع می‌کند(شکل ۹۱)؛ دایره‌های $S_۱(O)$ و $S_۲(O)$ یکدیگر را (به‌جز O) در نقطهٔ P' قطع می‌کنندکه همان منعکس نقطهٔ P نسبت به‌دایرهٔ K است.

با توجه بـه تقارن شکل، نقطهٔ P' روی OP قرار دارد. از تشابه دو مثلث متساوی‌الساقین $S_۱OP'$ و $PS_۱O$ نتیجه می‌شود که

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^{۲}$$

این ساختمان، برای موردهایی است که نقطهٔ P دربیرون دایره باشد؛



شکل ۹۱

در حالتی هم‌کـه نقطه در داخل دایره باشد، ولی فاصلهٔ آن از مرکز دایره بزرگتر از نصف شعاع باشد، بازهم می‌توان از همین ساختمان استفاده کرد. برای حالتی که نقطهٔ P در داخل دایره باشد و فاصله‌ای کمتر از نصف‌شعاع تا مرکز داشته باشد، بعداً صحبت خواهیم کرد.

۲. پیدا کردن مرکز دایره‌ای که متناظر با خط راست یا دایرهٔ مفروض، در انعکاس نسبت به K است.

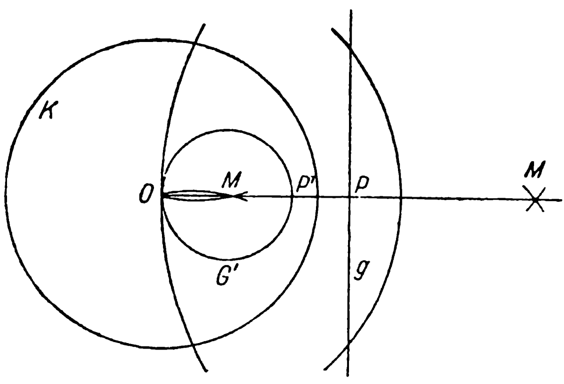
a) نقطهٔ M مرکز مجهول دایرهٔ G'، متناظر با خط راست g (شکل ۹۲) از این راه به‌دست می‌آید کـه، ابتدا نقطهٔ M'، قرینهٔ O نسبت به خط راست g و، سپس، منعکس نقطهٔ M' نسبت به دایرهٔ K را پیدا کنیم.

اثبات. اگـر P و P' را نقطه‌هـای برخورد خط راست OM بـا خط راست g و دایرهٔ G' بگیریـم، آن وقت $\overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{OP'}$ و بنا بـر ایـن $\overline{OM'}=2\overline{OP}$ که مستقیماً از رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود:

$$\overline{OM}\cdot\overline{OM'}=\overline{OP}\cdot\overline{OP'}$$

کافی است که خط راست g به‌وسیلهٔ دو نقطهٔ آن داده شده باشد تـا بتوانیم (۱۴۷) نقطهٔ M'، قرینهٔ نقطهٔ M را به دست آوریم.

b) اگر دایره‌های A و A' منعکس یکدیگر نسبت به دایرهٔ K باشند و مماس‌هـای مشترك دو دایره را، کـه از نقطهٔ O می‌گذرند، رسم کنیم، باید



شکل ۹۲

نقطه‌هـای تماس Q و Q' (شکل ۹۳)، منعکس یکدیگر نسبت بـه دایـرهٔ K باشند.

اکنون اگر $Q'M$ را عمود بر این مماس و QO' را عمود بر خطی که از دو مرکز دایره‌ها می‌گذرد، رسم کنیم، دو مثلث OQO' و $OQ'M$ متشابه می‌شوند. از آن جا نتیجه می‌شود:

$$\overline{OM}:\overline{OQ'}=\overline{OQ}:\overline{OO'}$$

به نحوی که

$$\overline{OM}\cdot\overline{OO'}=\overline{OQ}\cdot\overline{OQ'}=r^{۲}$$

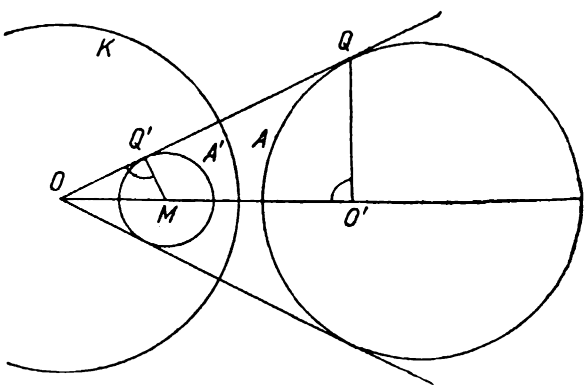
به این ترتیب، نقطه‌های O' و M، نسبت به دایرهٔ K، منعکس یکدیگرند.

اکنون، همان طور که از شکل روشن است، O' منعکس نقطهٔ O نسبت به دایرهٔ A، و M مرکز دایرهٔ A' است.

بنابراین، برای آن کـه نقطهٔ M را به دست آوریم، باید نقطهٔ O'، منعکس نقطهٔ O نسبت بـه دایـرهٔ مفروض A را پیدا کنیم، سپس، نقطهٔ M، منعکس نقطهٔ O' نسبت به دایرهٔ K را به دست آوریم.

۳. روش کلی حل مساله‌های ساختمانی هندسه، تنها به‌کمک پرگار

با استفاده از آن‌چه در ۱ و ۲ آوردیم، نه تنها می‌توان ثابت کرد که هر مساله درجهٔ دوم ساختمانی را می‌توان تنها به‌کمک پرگار حل کرد، بلکه



شکل ۹۳

درضمن روشی را به دست آورد که، به کمك آن، بتوان این گونه مسأله‌ها را حل کرد.

هر مسالهٔ ساختمانی درجهٔ دوم، منجر به شکلی می‌شود که از خطهای راست و دایره‌ها تشکیل شده است. منعکس چنین شکلی نسبت به یك دایره (که به عنوان دایرهٔ انعکاس انتخاب می‌شود)، فقط شامل دایره‌هاست که می‌توان آن‌ها را (بنا بر ۲) به کمك پرگار رسم کرد.

از آن جا که، برای رسیدن از نقطهٔ P به نقطهٔ منعکس آن P'، باز هم می‌توان فقط از پرگار استفاده کرد (بنا بر ۱)، بنا براین روشی به دست می‌آید که، به کمك آن، می‌توان هر مسالهٔ ترکیبی درجهٔ دوم را، تنها به کمك پرگار، حل کرد.

مثلاً، اگر بخواهیم یك مسالهٔ هندسی را، تنها به کمك پرگار حل کنیم، ابتدا آن را به صورت عادی (یعنی با استفاده از پرگار و خط کش) حل می‌کنیم، در برابر ما شکلی مثل F پدید می‌آید که از خطهای راست و دایره‌ها تشکیل شده است.

اکنون دایرهٔ K را، به صورتی کاملاً مناسب، به عنوان دایرهٔ انعکاس انتخاب می‌کنیم و شکل F'، منعکس شکل F نسبت به دایرهٔ K را به دست می‌آوریم. بالاخره، منعکس آن چه را که در شکل F' به عنوان نتیجه به دست آمده است پیدا می‌کنیم تا جواب مجهول پیدا شود.

درضمن روشن‌است که همهٔ این ساختمان‌ها را می‌توان، تنها با پرگار انجام داد. دایرهٔ K را باید طوری انتخاب کرد که تا حد امکان کار را ساده‌تر کند.

در بیشتر موردها، مساله را می‌توان به چند بخش تقسیم کرد و، سپس، هر بخش را با روش مذکور حل کرد.

۴. یادداشت‌ها.

a) اکنون با استفاده از روش بالا، این مساله را حل می‌کنیم:
پاره خط AB را به n بخش برابر تقسیم کنید.

برای این منظور، پاره خط AB را n بار تکرار می‌کنیم تا به نقطهٔ

C برسیم، سپس نقطهٔ X، منعکس نقطهٔ C نسبت به دایرهٔ $A(B)$ را می‌سازیم. در این صورت

$$\overline{AX} = \frac{1}{n}\overline{AB}$$

زیرا
$$\overline{AX} \cdot \overline{AC} = \overline{AB}^2$$

می‌توان توجه کرد که این ساختمان، دقیقاً همان چیزی است که ماسکه رونی داده بود.

b) هنوز باید ثابت کنیم (§ ۲۰، ۱)، چگونه می‌توان منعکس نقطهٔ P را پیدا کرد، وقتی که P در داخل دایره و فاصلهٔ آن از مرکز دایره، کمتر از $\frac{r}{2}$ باشد.

برای این منظور، پاره خط OP را در عدد درست n ضرب می‌کنیم؛ عدد n را باید طوری انتخاب کرد که نقطهٔ P_1، که از این راه به‌دست می‌آید، از O فاصله‌ای بیشتر از $\frac{r}{2}$ داشته باشد. حالا، نقطهٔ P'_1، منعکس نقطهٔ P_1 را به دست می‌آوریم و پاره خط OP_1 را در n ضرب می‌کنیم. نقطهٔ P' که از این طریق به دست می‌آید، منعکس نقطهٔ P است؛ این نتیجه‌گیری ناشی از برابری زیر است:

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OP_1} \cdot \overline{OP'_1}$$

c) روشی را که در § ۲۰، ۱، برای پیدا کردن منعکس یك نقطه، تنها به‌کمك پرگار، آوردیم، ساده‌تر از ساختمان معمولی است که از خط‌های راست هم استفاده می‌کند. این مطلب، اهمیت استفاده از شعاع‌های معکوس را برای هرجایی که به دایره مربوط می‌شود، نشان می‌دهد.

در واقع، وقتی که می‌خواهیم هندسهٔ پرگار را بسازیم (کاری که ماسکه رونی هم، در اثر خود، به آن پرداخته است) طبیعی است که باید از رسم دایره آغاز کنیم و، سپس، نقطهٔ P را هم به‌آن‌ها اضافه کنیم و دایرهٔ مربوط به آن را رسم کنیم. به همین مناسبت است که، روش فوق، ساده‌ترین روش در هندسهٔ پرگار است.

درحالتی که نقطهٔ P روی محیط دایره باشد (شکل ۹۴)، باز هم روش ساده‌ای به دست می آید.

اگر P نقطه‌ای از دایرهٔ K باشد و اگر دایرهٔ $Q(P)=K_1$ را رسم کنیم (Q نقطهٔ دلخواهی از دایرهٔ K است)، نقطهٔ R به دست می آید. اکنون اگر K_1 را با دایرهٔ $P(R)$ برخورد دهیم، نقطهٔ S به دست می‌آید و می‌توان ثابت کرد که خط راست SP در نقطهٔ P بر دایرهٔ K مماس است.

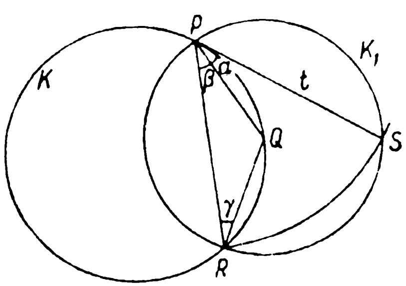
در واقع، خط راست PQ، از مرکزهای دو دایرهٔ K_1 و $P(R)$ می گذرد. بنابراین $\hat{\beta}=\hat{\alpha}$. ولی چون $\hat{\gamma}=\hat{\beta}$ (زیرا $\overline{PQ}=\overline{OR}$)، در نتیجه $\hat{\alpha}=\hat{\gamma}$. یعنی خط راست PS، در نقطهٔ P، بر دایرهٔ K مماس است.

این ساختمان، ساده‌تر از موردهایی است که به کمك رسم دایره‌ها به انجام می‌رسند: در این جا به جز دایرهٔ K، تنها به رسم دو دایره نیاز دارد.

d) برای حل مساله‌های ساختمانی هندسه، تنها به کمك پرگار، می‌توان راه کاملا متفاوت دیگری را انتخاب کرد.

همان طور که قبلاً دیدیم (فصل دوم)، شتینر ثابت کرد که همهٔ مساله‌های ساختمانی هندسه را می‌توان تنها به کمك خطهای راست حل کرد، به شرطی که دایرهٔ K و مرکز آن O، در صفحهٔ شکل داده شده باشد.

اگر فرض کنیم، مساله را باروش شتینر حل کرده‌ایم، درشکلی که به عنوان نتیجه به دست می‌آید، جز دایرهٔ K، تنها خطهای راست وجود دارد.



شکل ۹۴

اکنون اگر دایرهٔ K را به عنوان دایرهٔ انعکاس انتخاب کنیم و منعکس شکل حاصل را بسازیم، به شکلی می‌رسیم که تنها شامل دایره‌هایی است که، به جز دایرهٔ K، همهٔ آن‌ها از نقطهٔ O گذشته‌اند.

از آن جا که، بـرای رسیدن از شکل شتینری به‌منعکس آن، می‌توان تنها از پرگار استفاده کرد، به مطلب زیر قانع می‌شویم.

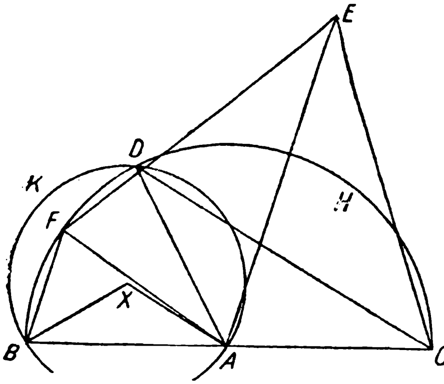
نه تنها می‌توان (همان طور کـه ماسکه رونی هم ثابت کرد)، هر مسالهٔ ترکیبی ساختمانی درجه دوم را، تنها به‌کمك پرگار، حل کـرد، بلکه حتی می‌توان قید دیگری هم اضافه کرد و شرط کرد که، همهٔ دایره‌هایی کـه وارد در ساختمان می‌شوند، به جز یکی از آن‌هـا، از نقطهٔ انتخابی دلخواهی گذشته باشند.

به‌این ترتیب، نه تنها می‌توان هر مسالهٔ ساختمانی را تنهـا بـا رسم دایره حل کرد، بلکه این دایره‌ها را هم می‌توان به محدودیتی مقید کرد.

مساله‌هایی برای تمرین

۱۵۹. پیدا کردن نقطهٔ X، مرکز دایرهٔ مفروض K.

روش اول (متعلق به ماسکه رونی). نقطهٔ A را روی محیط دایرهٔ K انتخاب و دایره H را به مرکز A و شعاع دلخواه AB رسم می‌کنیم؛ سپس نقطهٔ C را طوری درنظرمی گیریم که کمان BC، نیم‌دایره باشد (شکل ۹۵). به شعاع CD و به‌مرکز نقطه‌های A و C دایره‌هایی رسم می‌کنیم تا



شکل ۹۵

در نقطهٔ E یکدیگر را قطع کنند و نقطهٔ F را روی محیط دایـرهٔ H طوری پیدا می‌کنیم که داشته باشیم:

$$\overline{FE} = \overline{CD}$$

پاره خط BF، شعاع مجهول دایرهٔ K است.

اثبات. داریم:

$$\widehat{BAE} = \widehat{ACE} + \widehat{AEC} = \widehat{FAE} + \widehat{FAB}$$

و چون دو مثلث ACE و AFE برابرند، بنابراین $\widehat{FAB} = \widehat{FEA}$، که در نتیجه، مثلث‌های ABF و AFE متشابه می‌شوند و داریم:

$$\overline{BF} : \overline{AF} = \overline{AF} : \overline{AE}$$

و یا

$$\overline{BX} : \overline{AB} = \overline{AC} : \overline{CD}$$

در ضمن، X طوری تعریف می‌شود که داشته باشیم:

$$\overline{BX} = \overline{AX} = \overline{BF}$$

از تناسب اخیر نتیجه می‌شود کـه دو مثلث ABX و ADC متشابهند کـه از آن جا به دست می‌آید:

$$\widehat{BAX} = \widehat{ACD} = \frac{۱}{۲} \widehat{BAD}$$

و این، به‌ما امکان می‌دهد به‌برابری دومثلث BAX و AXD برسیم وبنابراین

$$\overline{AX} = \overline{BX} = \overline{DX}$$

یعنی X، مرکز مجهول دایرهٔ K است.

روش دوم. حل به‌کمك اصل شعاع‌های معکوس. مرکز انعکاس O را روی دایرهٔ K می‌گیریم و دایرهٔ انعکاس H را به‌مرکز R و شعاع دلخواه رسم می‌کنیم که دایرهٔ K را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند.

خط راست AB (شکل ۹۶)، ضمن انعکاس نسبت به H، به دایرهٔ K منجر می‌شود.

اگر بـا توجه به مساله ۱۴۷، نقطهٔ C قرینهٔ O نسبت به AB و نقطهٔ X، منعکس نقطهٔ C نسبت به H را پیدا کنیم، نقطهٔ X مرکز مجهول دایـرهٔ K خواهد بود.

۱۶۰. سه نقطهٔ A، B و C از دایـره‌ای داده شده است، مرکز آن را پیدا کنید.

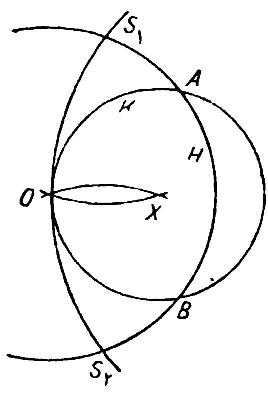
بـرای حـل این مساله هم، می‌توان از همـان راه مسالهٔ قبل رفت: به‌کمك انعکاس، دایرهٔ K را به‌خط راست g تبدیل می‌کنیم، سپس برعکس، مرکز دایره‌ای را جست و جو می‌کنیم‌که، ضمن این انعکاس، متناظر با خط راست g است.

برای این منظور، نقطهٔ A را مرکز انعکاس و دایرهٔ $A(B)$ را دایـرهٔ انعکاس، H، می گیریم و ابتدا نقطهٔ D، متناظر C را می‌سازیم.

BD همان خط راست g است‌کـه نگاشت معکوس آن نسبت به H، عبارت است از دایرهٔ مفروض K. حالا نقطهٔ E، قرینهٔ A نسبت به g و نقطهٔ X، منعکس E نسبت به H را پیدا می‌کنیم.

نقطهٔ X، مرکز مجهول دایرهٔ ABC است.

۱۶۱. محاسبهٔ تقریبی محیط دایره.



شکل ۹۶

ماسکه رونی روش جالبی برای محاسبهٔ تقریبی یك‌چهارم محیط دایره (یعنی برای محاسبهٔ $\frac{\pi}{۲}$) دارد که بسیارساده و، ازنظر عملی، با ارزش است.

اگر (شکل ۷۱) روی محیط دایره

$$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{AO}$$

را جداکنیم و دایره‌های $A(C)$ و $D(B)$ را رسم‌کنیم، دو دایره یکدیگررا در G قطع می‌کنند. اکنون اگر

$$\overline{BT}=\overline{BG}$$

را جداکنیم، پاره‌خط AT بـه تقریب برابر بـا یك چهارم محیط دایـره خواهد بود.

اثبات. اگر $\overline{AO}=۱$، آن وقت $\overline{OG}=\sqrt{۲}$. چون $BC=۱$، ازمثلث EGO نتیجه می‌شود:

$$\overline{BG}=\sqrt{۳-\sqrt{۶}}$$

در مثلث ABT داریم:

$$\widehat{ATB}=۳۰^\circ,\quad \overline{AB}=۱,\quad \overline{BT}=\sqrt{۳-\sqrt{۶}}$$

اگر طول پاره‌خط AT را برابر x بگیریم، داریم:

$$۱=x^۲+(۳-\sqrt{۶})-۲x\sqrt{۳-\sqrt{۶}}\cos ۳۰^\circ,$$

$$۱=x^۲+۳-\sqrt{۶}-x\sqrt{۹-۳\sqrt{۶}}$$

که از آن جا به دست می‌آید:

$$x=\frac{۱}{۲}\left(\sqrt{۹-۳\sqrt{۶}}+\sqrt{۱+\sqrt{۶}}\right)=۱/۵۷۱۲\ldots$$

چون $\frac{\pi}{۲}=۱/۵۷۰۸$، بنابراین یك چهارم محیط دایـره، با دقت تا

سه رقم، به دست می آید.

اختلاف بین نتیجه‌ای که از راه رسم به دست می‌آید و مقدار حاصل از محاسبه $\frac{۴}{۱۰۰۰۰}$ شعاع را تشکیل می‌دهد، یعنی اگر مثلاً شعاع دایره برابر $\frac{۱}{۴}$ متر باشد، این اختلاف برابر $\frac{۱}{۱۰}$ میلی متر می‌شود و این اندازه دقت، برای هرمورد عملی، به اندازهٔ کافی خوب است.

§ ۲۱. ساختمان هندسی به‌کمك پرگار ثابت

۱. دیدیم که هر ساختمان هندسی را که بتوان به‌طریق معمولی و به‌کمك پرگار و خط‌کش انجام‌داد، می‌توان تنها با رسم دایره‌ها (و بدون استفاده از خط‌کش) هم به پایان رسانید، حتی روشن کردیم که، برای این دایره‌ها هم، می توان شرط محدودکننده‌ای برقرار کرد.

در ضمن می‌دانیم، وقتی یك ساختمان هندسی را تنها به‌کمك پرگار انجام دهیم، درعمل، ارزش بیشتری دارد، زیرا برای رسم، پرگار وسیله‌ای به مراتب دقیق‌تر از خط‌کش است.

این دقت بازهم بیشتر، و کار رسم به مراتب ساده‌تر خواهد شد، اگر همهٔ دایره‌های لازم، با هم برابر باشند، یعنی وقتی که بتوانیم کار رسم شکل را با یك پرگار ثابت (پرگاری که شعاع آن تغییر نمی کند) انجام دهیم.

۲. کانتور در یکی از نوشته‌های خود*، ادعا می کند که، بی‌تردید، یونانی‌ها با هندسهٔ پرگار ثابت آشنا بوده‌اند. کانتور سپس یادآوری می کند که بخش بزرگی ازکتاب ابوالوفا ریاضی‌دان ایرانی، به نام «ساختمان‌های هندسی» اختصاص به‌حل مساله‌های ساختمانی، به‌کمك پرگار ثابت، دارد.

۳. اگر تلاش کنیم مساله‌های اصلی هندسه را به‌کمك پرگار ثابت و بدون استفاده از رسم خطهای راست حل کنیم، با آن‌که موفق می‌شویم یك

---

*) *Cantor, Geschichte der Mathematik.*

پاره‌خط را دو یا چند برابر کنیم، در تقسیم پاره‌خط‌ها به دو یا چند بخش برابر توفیقی پیدا نمی‌کنیم.

به‌این ترتیب، اگر وسیلهٔ رسم را به‌کمك یك پرگار ثابت محدود کنیم، نمی‌توانیم همهٔ مساله‌های ساختمانی هندسه را، بدون رسم خط‌های راست، حل کنیم.

ولی اگر، به‌جز پرگار ثابت، امکان استفاده از خط‌کش یك لبه را هم داشته باشیم، وضع به‌صورت دیگری درمی‌آید. دراین صورت، خواهیم توانست هر مسالهٔ ساختمانی هندسه را حل کنیم، زیرا بنا برقضیهٔ شتینر، وقتی که یك دایره درصفحهٔ شکل داشته باشیم، می‌توانیم همهٔ مساله‌های ساختمانی هندسه را، تنها با رسم خط‌های راست، حل کنیم.

به این ترتیب، هندسهٔ پرگار ثابت را باید به این معنا گرفت که رسم خط‌های راست مجاز است و، در این صورت، حل مساله‌ها، ساده‌تر هم خواهد شد.

۱۶۲. فرض می‌کنیم، دو پرگار ثابت با شعاع‌های مختلف در اختیار داشته باشیم. اگر تنها این دو پرگار ثابت را در اختیار داشته باشیم (و نتوانیم حتی یك خط راست رسم کنیم)، کدام مساله‌های ساختمانی را می‌توان حل کرد؟

فصل چهارم

ساختمان‌های هندسی به‌کمك خط‌کش با دولبهٔ موازی (دو خط راست موازی بـا فاصلهٔ ثابت). ساختمان‌هـای هندسی بـه‌کمك زاویـهٔ قائمهٔ متحرك. ســاختمان‌هـای هندسی به‌کمك زاویهٔ دلخواه متحرك. ســاختمان‌هـای هندسی‌به‌کمك خط‌کش وپاره‌خط ثابت (مقیاس طول). ساختمان‌های هندسی به‌کمك نیمساز نگار

§۲۲. مقدمه

۱. حل دقیق و حل تقریبی مساله‌های ساختمانی هندسه.

معمولاً می‌گویند: مسالـهٔ ساختمانی هندسه را وقتی می‌توان دقیق حل‌کردکه، برای حل آن، رسم تعداد محدودی دایره وخط راست لازم باشد؛ دراین صورت، به فرض ایده‌آل بودن وسیله‌های رسم، جواب دقیقاً به‌دست می‌آید.

برعکس، راه حل را تقریبی‌گویند، وقتی‌کـه حتی بـه‌فرض ایده‌آل‌ـ بودن وسیله‌های رسم، نتوان با راه انتخاب شده، به جوابی رسیدکه دارای دقت ریاضی باشد، و یا وقتی‌که برای رسیدن بـه جواب به‌تعداد نامحدودی ساختمان نیاز داشته باشیم.

این یادآوری‌ها، برای آن‌چه بعد ازاین خواهد آمد، اهمیت دارند.

این مساله را درنظرمی گیریم: می‌خواهیم نقطهٔ x را روی خط راست

g طوری پیدا کنیم که، از آن جا، پـاره‌خط مفروض AB به‌زاویهٔ قائمه دیده شود. بـرای حل این مساله می‌توان ضلع‌های زاویهٔ‌قائمه متحرکـی را (که مثلاً ازچوب ساخته شده است) روی نقطه‌ای A و B قرار داد و تا آن‌جا آن را حرکت داد که راس زاویهٔ قائمه برخط راست g قرار گیرد.

معمولاً مساله را به‌طریق دیگری حل می کنند. بـا وجود این، ازاین راه هم می‌توان نقطهٔ x را با دقت بـه‌دست‌آورد: این، یك راه حل تقریبی نیست، زیرا اگروسیلهٔ مورد استفاده را ایده‌آل وکامل به‌حساب‌آوریم، جای دقیق نقطهٔ x پیدا می‌شود. درست‌است که باید زاویهٔ قائمه را مدتی حرکت داد تا راس آن درموضع موردنظر قرار گیرد، ولی این وضع، به هیچ وجه موجب تقریبی‌بودن ساختمان ما نمی‌شود، زیرا درحالتی هم که بخواهیم دو نقطه را به‌وسیلهٔ خط راستی به‌هم وصل کنیم، باید خط‌کش را مدتی حرکت دهیم تا درجای مطلوب قرار گیرد.[۹۲]

۲. عمل‌های اساسی.

a) ازساختمان‌های‌شتینری (§۱۳) می‌دانیم که، به‌کمك رسم خطهای راست و دایره، تنها می‌توان شش عمل اصلی زیر را، مستقیماً انجام داد:

۱) رسم خطهای راست؛ ۲) تعیین نقطهٔ برخورد خط راست مفروض با خط راستی‌که رسم می‌کنیم؛ ۳) تعیین نقطه‌های برخورد دایرهٔ مفروض با خط راستی‌که رسم می‌کنیم؛ ۴) رسم دایره؛ ۵) تعیین نقطه‌های برخوردخط راست مفروض بـا دایره‌ای‌کـه رسم می‌کنیم؛ ۶) تعیین نقطه‌های برخورد دایرهٔ مفروض با دایره‌ای که رسم می کنیم.

اگر وسیله‌های حل محدود باشند، باید ثابت‌کنیم کـه، به‌کمك آن‌ها، می‌توان این شش عمل اساسی را انجام داد.[۹۳]

b) دراین‌فصل، همه‌جا فرص براین است‌که می‌توانیم خطهای راست را رسم‌کنیم. بنابراین، عمل‌های ۱) و ۲) مستقیماً انجام می‌شوند؛ حل‌مسالهٔ ۴) را، بدون استفاده از پرگار، تنها می‌توان بـه‌کمك نقطه‌ها انجام داد.[۹۴] به این ترتیب، تنها مساله‌های ۳)، ۵) و ۶) باقی می‌ماندکـه، همان طورکه در §۱۳ دیدیم، می‌توان آن‌ها را به‌یك مساله منجر کرد، یعنی

A) خط راستی مفروض است، بـه‌جز آن، یك دایره به وسیلهٔ مرکز و

شعاع آن داده شده است. می‌خواهیم نقطه‌های برخورد خط راست با دایره را پیدا کنیم.

برای این که ثابت کنیم، به‌کمك فلان‌وسیله، می‌توانیم همهٔ مساله‌های ساختمانی را حل کنیم، باید روشن کنیم که، بـه‌کمك این وسیله، می‌توان مسالهٔ عمدهٔ A را حل کرد.

c) وقتی که‌می‌دانیم حل‌همهٔ مساله‌های‌ساختمانی، به‌کمك وسیلهٔ محدود ما، قابل حل‌اند، باید با دنبال کردن گام به‌گام راه حل معمولی (یعنی راه‌حلی که به‌کمك پرگار و خط‌کش انجام می‌گیرد)، درهر مرحله راه عمل را به‌کمك وسیلهٔ مفروض خود انجام دهیم.

با وجود این، دربسیاری مـوردها، این راه حل کلی، بهترین راه حل نیست، زیرا بسیار پیش می‌آیدکه‌راه‌حل یك مسالهٔ ساده ویا یك مساله‌ترکیبی پیچیده، به کمك وسیلهٔ محدود مـا، خیلی ساده‌تـر و سریع‌ترانجام‌می‌شودتا به‌کمك پرگار یا خط‌کش.

۳. مساله‌های مقدماتی.

بنابراین، بهتراست، ابتدا بـه حـل مسالــه‌هــای مقدماتی بپردازیم، به‌خصوص که حل مسالهٔ عمدهٔ A هم، برپایهٔ آن‌ها به‌دست می‌آید.

این مساله‌های مقدماتی (بنابه عقیدهٔ شتینر) چنین‌اند:

a) رسم خط‌های موازی؛

b) دویا چند برابر کردن پاره‌خطی که طول آن مفروض است، یا تقسیم آن به دویا چند بخش برابر؛

c) رسم خط‌های راست عمود برهم؛

d) تقسیم یك زاویه به‌دو زاویهٔ برابر یا دو و چند برابر کردن آن؛

e) رسم‌خط راست ازنقطهٔ مفروض، به‌نحوی که‌باخط راست مفروض، زاویه‌ای برابر با زاویهٔ دیگری که مقدار و موقعیت آن معلوم است، بسازد؛

f) رسم پاره‌خط راست ازنقطهٔ مفروض، به نحوی که با پاره‌خطی که اندازه و موقعیت آن‌معلوم است، برابر باشد.

دراین‌فصل، درهرمورد، ابتدا به‌حل این مساله‌های مقدماتی‌می‌پردازیم و، سپس، به‌سراغ مسالهٔ عمدهٔ A می‌رویم.

§ ۲۳. ساختمان‌های هندسی به‌کمك خط‌کشی که دولبهٔ موازی دارد (دوخط راست موازی با فاصلهٔ ثابت a[۹۵])

a) نتیجه خواهیم گرفت‌که، به‌کمك خط‌کش با دولبهٔ موازی، می‌توان همهٔ‌مساله‌های درجه‌دوم هندسه را بادقت حل‌کرد و، ازاین‌گذشته، به‌مساله‌های برخواهیم خوردکه، بااین وسیله، ساده‌تر از راه حل معمولی به‌کمك پرگار و خط‌کش حل می‌شوند.

b) قبل ازهمه باید مساله‌های مقدماتی شتینری را، به‌کمك خط‌کش با دولبهٔ موازی، حل‌کنیم. در ضمن، دراین ساختمان‌ها، اغلب از قضیهٔ مربوط به ذوزنقه استفاده خواهیم‌کرد (§۱۰ را ببینید).

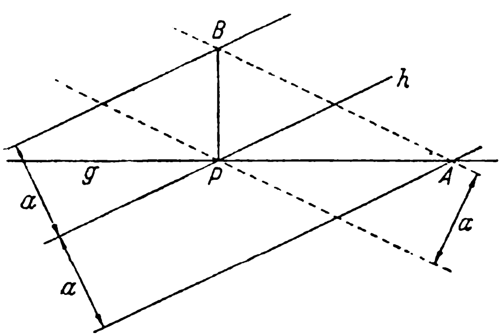
۱۶۳. رسم خط موازی (ساختمان همان است‌که درشکل ۵۵ بود).

۱۶۴. پاره‌خط به طول مفروض را چند برابر یا به‌چند بخش برابر تقسیم‌کنید (شبیه شکل ۵۶، حل می‌شود).

۱۶۵. رسم خطهای راست عمود برهم.

خط راست g ونقطهٔ P واقع برآن مفروض است. می‌خواهیم ازنقطهٔ Pعمودی بر g اخراج‌کنیم.

ازنقطهٔ P، خط‌راست دلخواه h را رسم‌کنید و خط‌کش را دوبار در دوطرف آن قرار دهید؛ سپس خط‌کش را درصفحهٔ شکل جابه‌جا کنید تا یکی از لبه‌های‌آن ازP ولبهٔ دیگرش از A بگذرد (شکل ۹۷). خط‌راست PB، عمود مجهول است.



شکل ۹۷

خط راست h را طوری رسم کنید که نقطهٔ A، به اندازهٔ کافی از P دور باشد.

این ساختمان، بنا بـر ۲۲§، ۱، در هیچ مـورد خـود تقریبی نیست، زیرا به‌فرض ایده‌آل بودن وسیله، به‌نتیجه‌ای کاملاً دقیق می‌رسیم.

۱۶۶. زاویه‌ای را به‌دوبخش برابر تقسیم، یا چند برابرکنید.

اگـر بخواهیم زاویهٔ MSN را نصف کنیم، به ترتیبی عمل‌می کنیم، که درشکل ۹۸ نشان‌داده شده‌است (a، عرض‌خط کش دولبهٔ مفروض‌است).

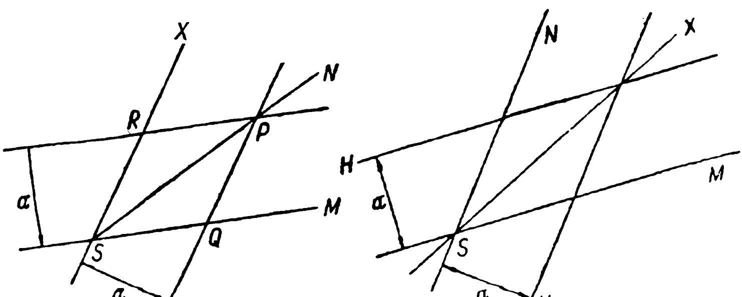
دراین‌جا، ساختمانی کـه به‌دست می‌آید، ساده‌تر ازحالتی است که با پرگار و خط‌کش (یك لبه) عمل می کردیم.

برای دوبرابرکردن زاویهٔ MSN (شکل ۹۹)، ابتدا خط‌کش را بر خط راست SM قرار دهید و نقطهٔ P را به‌دست آورید؛ سپس خط‌کش را طوری جا به‌جا کنیدکه یکی از لبه‌های آن از نقطهٔ P ودیگری از نقطهٔ S بگذرد. شکل $SQPR$ لوزی است.

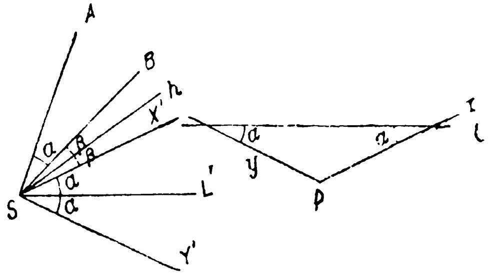
۱۶۷. از نقطهٔ P، خط راست x را طوری رسم‌کنیدکه با خط راست مفروض l، زاویه‌ای برابر بـا زاویهٔ ASB، که از نظر اندازه و وضع مفروض است، بسازد.

خط راست SL' را موازی l (شکل ۱۰۰) وسپس نیمساز h اززاویهٔ ASL' را رسم کنید. بعد، اگر جداکنیم:

$$\widehat{X'Sh}=\widehat{hSB}=\beta$$



شکل ۹۹ شکل ۹۸



شکل ۱۰۰

$$\widehat{Y'SL'}=\widehat{L'SX'}=\alpha$$

آن وقت، خطهای راست SY' و SX' موازی با خط راست مجهول‌اند.

۱۶۸. خط‌راست g و نقطهٔ M واقع برآن و، همچنین، پاره‌خط AB مفروض‌اند. نقطهٔ X را بر g طوری پیدا کنیدکه داشته باشیم: $MX=\overline{AB}$.

روی شکل ۱۰۱، خط راست h، نیمساز زاویهٔ $A'Mg$ وخط راست $A'X$ موازی h است.

c) با انجام ساختمان‌های مقدماتی، به‌حل مسالهٔ عمدهٔ A می‌پردازیم.

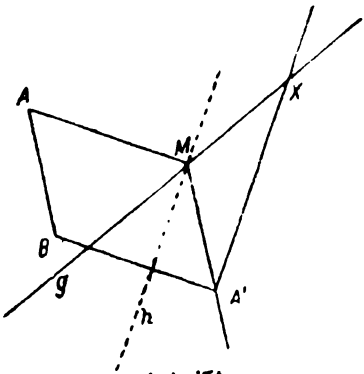
خط‌راست g وپاره‌خط MA موازی با g را مفروض می‌گیریم (شکل ۱۰۲). می‌خواهیم نقطه‌های X_1 و X_2، بـرخورد خط راست g را با دایرهٔ به مرکز M وشعاع MA پیدا کنیم.*

یك لبهٔ خط‌کش را روی خط راست MA می گـذاریم و خط راست g' را به دست می آوریم (شکل ۱۰۲)؛ اکنون خط راست دلخواه MB را رسم می کنیم که g را درنقطه B و g' را درنقطهٔ B' قطع می کند؛ بعد خط راست $A'B'$ را موازی خط راست AB می کشیم.

اکنون اگرخط‌کش را درصفحهٔ شکل جا به‌جا کنیم تا یکی ازلبه‌های آن بر M ودیگری بر A' قرار گیرد (این‌کار را به‌دو طریق می‌توان انجام داد)، آن‌وقت، نقطه‌های مجهول X_1 و X_2 به‌دست می‌آید.

---

*) اگر شعاع دایره، به‌وسیلهٔ پـاره‌خط دلخواهی داده شده باشد، به‌کمك مسالهٔ ۱۶۷ می‌توان شعاع‌را موازی با g رسم‌کرد.



شکل ۱۰۱

اثبات. شکل‌هـای $MA'DX'_2$ و $MA'CX'_1$ لـوزی‌اند. X'_1 و X'_2 نقطه‌های برخورد خط راست g' بـا دایرهٔ $M(A')$ هستند. بنابراین، X_1 و X_2 نقطه‌های برخورد خط‌راست g بادایرهٔ‌هم‌مرکز آن، $M(A)$، خواهندبود.

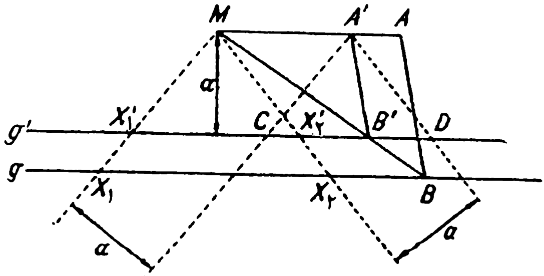
d) پیدا کردن نقطه‌های برخورد دودایره را می‌توان، کاملاً شبیه آن‌چه درشکل ۶۸ انجام داده‌ایم، به‌مسالهٔ قبلی منجر کرد.

e) بـه‌این ترتیب ثابت شدکـه، هـرمسالهٔ ساختمانی درجهٔ دوم را، می‌توان به‌کمك یك خط‌کش دولبه (دوخط موازی با فاصلهٔ ثابت) حل‌کرد؛ درضمن این راه‌حل‌ها به‌هیچ وجه دشوار نیستند و، حتی در برخی موردها، از راه حل‌های عادی ساده‌ترهم هستند.

این ساختمان‌ها، درنقشه برداری، دارای ارزش عملی‌اند.

مساله‌هایی برای تمرین

۱۶۹. مثلثی‌مفروض‌است. می‌خواهیم به‌کمك یك‌خط‌کش‌دولبه، مرکز



شکل ۱۰۲

دایره‌های محاطی ومحیطی آن را پیدا کنیم.

۱۷۰. پاره‌خط AB، کـه طول آن کمتر از فاصلهٔ بین دولبهٔ خط کش است، داده شده است. می‌خواهیم از نقطهٔ A عمودی بر پاره‌خط AB اخراج کنیم. (پاره‌خط AB را درعددی، که به‌حدکافی بزرگ است، ضرب کنید.)

۱۷۱. دو نقطهٔ A و B مفروض‌انـد. خط کشی کـه دراختیار داریم، کوتاه‌تر ازآن است که بتوان، به‌کمك آن، دو نقطهٔ A و B را مستقیماً به‌هم وصل کرد. می‌خواهیم، نقطهٔ X واقع برخط راست AB را پیدا کنیم.

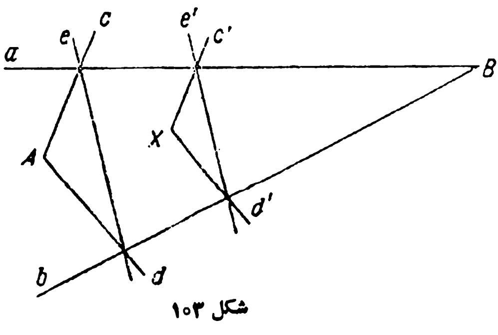
ازنقطهٔ B، دو خط‌راست a و b را رسم کنید (شکل ۱۰۳). این‌دوخط راست را می‌توان، با چندبـار استفاده از خـط کش، تا هـرجـا کـه لازم باشد، به‌طرف A امتداد داد.

اکنون اگرخطهای‌راست c،d،e را رسم کنیم وخط‌راست e' را موازی e، c' را موازی c و d' را موازی d بکشیم، آن وقت، نقطهٔ X روی خط راست AB قرارمی گیرد.

بنابراین، به‌کمك یك خط کش کوتاه هم می‌توان دونقطهٔ A و B را با یك‌خط‌راست به‌هم‌وصل کرد. به‌طورکلی، هریك ازمساله‌های‌فوق رامی‌توان به‌کمك یك خط کش کوتاه حل کرد.

۱۷۲. روش جالبی را برای حل مسالـه‌هـای ساختمانـی، به‌کمك خط کش با دولبهٔ موازی، می‌توان ازساختمان‌های شتینر اقتباس کرد.

a) به‌کمك خط کش دولبه‌ای کـه فاصلهٔ بین دولبهٔ آن برابر a باشد، می‌توان‌خطهای راست را رسم کرد؛ درضمن، به‌کمك آن‌می‌توان مماس‌هایی راکه از هر نقطهٔ P بردایرهٔ K رسم می‌شوند پیدا کرد، به شرطی که مرکز



شکل ۱۰۳

دایرهٔ K، نقطهٔ M، معلوم وشعاع آن برابر a باشد.

به‌کمك‌همین وسیله‌های رسم، می‌توان قطب هرخطراست و قطبی هر نقطه را نسبت به دایرهٔ K به‌دست‌آورد.

b) اگر یك مسالهٔ هندسه باروش شتینر حل شود، شکل F به‌دست می‌آیدکه درآن، به‌جز دایرهٔ شتینر، تنها شامل خطهای راست است.

اکنون اگر بخواهیم شکل F'، قطبی شکل F نسبت به دایرهٔ به‌مرکز M وشعاع a را پیداکنیم، برای‌انجام ساختمان، به‌جزرسم خطهای راست، تنها به‌رسم مماس‌های بردایرهٔ K نیازداریم. برای عبورازF به F'، درست مثل عبور از F' به F، بازهم همین عمل‌ها لازم‌اند.

c) به‌این ترتیب، هرمسالهٔ ساختمانی درجهٔ دوم را می‌توان به کمك خط‌کشی بادو لبهٔ موازی حل کرد، در ضمن، برای استفاده ازآن محدودیتی هم می‌توان قایل شد.[۹۶]

پیشنهاد می‌کنیم، مساله‌های این بند را، با روشی‌که دراین‌جا مطرح کردیم، دوباره حل‌کنید.

§۲۴. ساختمان‌های هندسی، به‌کمك زاویهٔ قائمه

a) تنها وسیله‌ای‌که دراین بند برای رسم مورد استفاده قرارمی‌گیرد، زاویهٔ قائمه متحرك است[۹۷] (که مثلاً ازچوب ساخته شده باشد)، مثلاً مثلث قائم‌الزاویه‌ای‌که وترآن را جداکرده‌ایم.

b) دراین‌جا هم، نتیجه خواهیم‌گرفت‌که، به‌کمك این وسیله، می‌توان هرمسالهٔ ساختمانی درجهٔ دوم را درهندسه حل‌کرد.

خواهیم دید که زاویهٔ قائمه، وسیله‌ای به مراتب نیرومندتر از پرگار است، زیرا به‌کمك دو یا سه زاویهٔ قائمه می‌توان مثلاً معادلهٔ درجهٔ سوم را حل کرد، در حالی که حتی به کمك تعداد زیادی پرگار، نمی‌توان به این نتیجه رسید.

دوباره، به‌بررسی‌مساله‌های مقدماتی (§۲۲، ۳) می‌پردازیم. حل بعضی ازآن‌ها، مستقیماً به‌دست می‌آید.

۱۷۳. رسم‌موازی‌ها به‌کمك زاویهٔ‌قائمه. (ابتدا عمودها را رسم‌کنید.)

۱۷۴. تکرار یك پاره‌خط (چند برابر کردن آن) یاتقسیم آن.

فرض کنید بخواهیم پاره‌خط AB را سه‌برابر کنیم (شکل ۱۰۴). خط راست g را از نقطهٔ A درجهت دلخواه رسم کنید، عمود h را بر AB بسازید و همان‌طور که در شکل ۱۰۴ دیده می‌شود، ادامه دهید. تقسیم پاره‌خط AB به دو بخش برابر، درشکل ۱۰۵ داده شده است.

تقسیم پاره‌خط بـه تعداد بیشتری بخش‌های برابر را می‌توان مثل قبل (§۱۰) به کمك دو خط راست موازی و یا با روش بریانشون انجـام داد. (درضمن، شکل $ABba$، مستطیل می‌شود.)

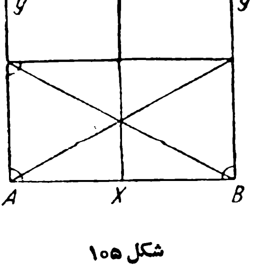
۱۷۵. رسم خط‌های راست عمود برهم. (مستقیماً به‌دست می‌آید.)

۱۷۶. زاویهٔ مفروضی را چند برابر یا نصف‌کنید.

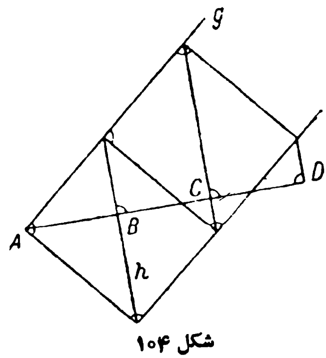
اگر بخواهیم زاویـهٔ ASB را دوبرابر کنیم، طبق شکل ۱۰۶، ابتدا AC را عمود بر SB رسم وسپس $\overline{CD}$ را برابر $\overline{AC}$ جدا می‌کنیم.

اگربخواهیم زاویهٔ ASC را نصف‌کنیم، به‌این ترتیب عمل می‌کنیم. $\overline{BS}=\overline{AS}$ را جـدا می‌کنیم (شکل ۱۰۷)، سپس زاویهٔ قائمه را در صفحهٔ شکل طوری جابه‌جا می‌کنیم که ضلع‌های زاویه از نقطه‌های A و B بگذرند و راس آن برضلع دوم زاویهٔ α واقع باشد. خط راست x، که‌موازی BC رسم‌می‌شود، که‌همان نیمساز مجهول زاویه‌است. (این ساختمان، بنابر§۲۲، ۱، درهیچ موردی تقریبی نیست.)

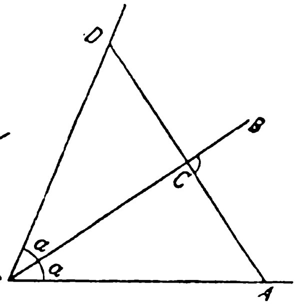
۱۷۷. از نقطهٔ مفروض P، خط راست x را طوری رسم‌کنیدکه باخط



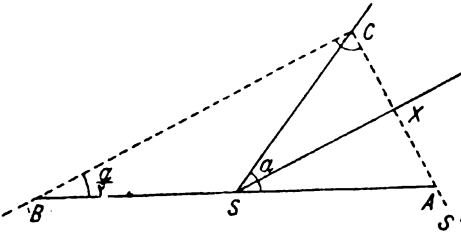
شکل ۱۰۵



شکل ۱۰۴



شکل ۱۰۶



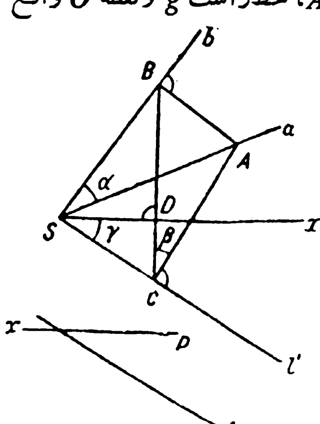
شکل ۱۰۷

راست مفروض l، زاویه‌ای برابر با زاویهٔ ASB ــ که ازنظر اندازه و موقعیت خود مفروض است ــ بسازد (شکل ۱۰۸).

خط‌راست l' را موازی بـا l، از S بگذرانید، روی a نقطهٔ دلخواه A را انتخاب کنید و عمودهـای AB و AC را، بـه‌ترتیب، بر b و l' فرود آورید؛ سپس نقطه‌های B و C را به‌هم وصل کنید و از S عمود SD را بر BC فرود آورید. خط راست مجهول x، با SD موازی است.

اثبات. $ABSC$ یك چهارضلعی محاطی است، بنابراین: $\hat{\alpha}=\hat{\beta}$. سپس $\hat{\beta}=\hat{\gamma}$، زیرا ضلع‌هایی عمود بر هم دارند. درنتیجه: $\hat{\gamma}=\hat{\alpha}$.

۱۷۸. پـاره‌خط AB، خط‌راست g ونقطهٔ O واقع بر g مفروض‌اند.



شکل ۱۰۸

روی g نقطهٔ X را طوری پیدا کنید که داشته باشیم: $\overline{OX} = \overline{AB}$.

با رسم موازی‌ها، می‌سازیم (شکل ۱۰۹):

$$\overline{OC} = \overline{OD} = \overline{AB}$$

سپس، زاویهٔ قائمه را درصفحهٔ شکل طوری جابه‌جا می‌کنیم که ضلع‌های آن از C و D بگذرند و راس آن بر g قرار گیرد. (ساختمان، در هیچ موردی تقریبی نیست.)

۱۷۹. مسالهٔ عمدهٔ A: خط‌راست g و پاره‌خط MA، موازی با g، داده شده است. می‌خواهیم X_1 و X_2، نقطه‌های برخورد خط راست g را با دایرهٔ به‌مرکز M و شعاع MA پیدا کنیم.

پاره‌خط MA را ازطرف نقطهٔ M و به‌اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم، به‌نقطهٔ B می‌رسیم؛ سپس زاویهٔ قائمه را روی صفحهٔ شکل آن‌قدر جا به‌جا می‌کنیم تا ضلع‌های آن از A و B بگذرند و راس آن بر g قرار گیرد.

۱۸۰. مثلث ABC مفروض‌است. می‌خواهیم، تنها به‌کمك زاویهٔ‌قائمه، نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC را پیدا کنیم.

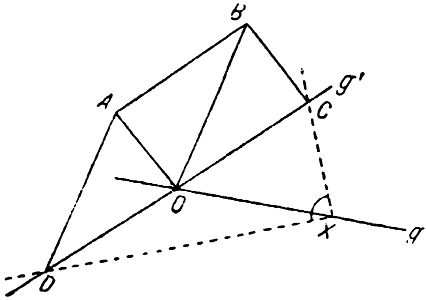
ازنقطهٔ A عمودی‌برضلع AC، وازنقطهٔ B عمودی برضلع BC اخراج کنید؛ خط راستی که نقطهٔ برخورد عمودها را به C وصل می‌کند، از نقطهٔ مجهول O می‌گذرد.

§۲۵. ساختمانهای هندسی، به‌کمك زاویهٔ دلخواه

a) دراین بند، فرض ما براین است که تنها یك وسیله برای رسم در اختیار داریم: زاویهٔ متحرك α (که مثلاً ازچوب ساخته شده است)؛ α می‌تواند هراندازهٔ دلخواهی، به‌جز ۱۸۰ درجه داشته باشد.[۹۸]

ثابت خواهیم کرد که، تنها به کمك همین وسیله، می‌توانیم هر مسالهٔ هندسی درجه دوم را حل کنیم.

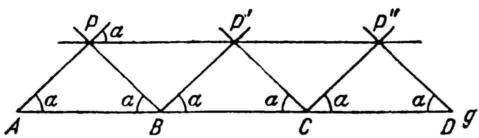
b) برای اثبات این حکم، باید ثابت کنیم که هرشش مسالهٔ مقدماتی‌و سپس مسالهٔ اصلی §۲۲ را می‌توان به کمك این این وسیله حل کرد.



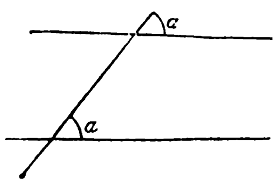
شکل ۱۰۹

۱۸۱. رسم خطهای موازی. (راه حل درشکل ۱۱۰ دیده می‌شود.)

۱۸۲. پاره‌خطی را چند برابر ویـا به‌بخش‌های برابرتقسیم‌کنید. روی شکل ۱۱۱ دیده می‌شود کـه چگونه می‌توان یك پاره‌خط AB را، به کمك



شکل ۱۱۱

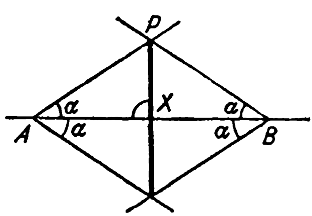


شکل ۱۱۰

زاویهٔ متحرك α، سه برابر کرد: زاویهٔ α را درنقطه‌های A و B قراردهید تا نقطهٔ P به دست آید، سپس از نقطهٔ P خط راستی موازی AB رسم کنید و، سرانجام، نقطه‌های P'، C، P'' و D را به دست آورید.

شکل ۱۱۲ نشان می‌دهد که چگونه‌می‌توان پاره‌خط AB را نصف کرد.

تقسیم یك پاره‌خط به‌چند بخش برابر، شبیه §۱۰، انجام می‌شود.

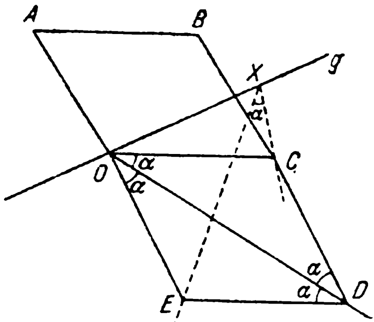


شکل ۱۱۲

۱۸۳. رسم عمود (راه حل درشکل ۱۱۲ دیده می‌شود.)

۱۸۴. خط راست g، نقطهٔ O روی g و پاره‌خط AB دربیرون g داده شده‌اند. نقطهٔ X را روی g طوری پیدا کنید که داشته باشیم: $\overline{OX}=\overline{AB}$.

طبق شکل ۱۱۳، نقطه‌های C، D و E را پیدا کنید؛ سپس زاویهٔ α را روی صفحهٔ شکل طوری قرار دهید که ضلع‌های آن از E و C بگذرند و راس آن بر g قرار گیرد.



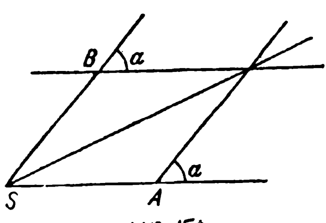
شکل ۱۱۳

اثبات. نقطه‌های C، E و X برمحیط دایره‌ای به‌مرکز O و شعاع AB قرار دارند.

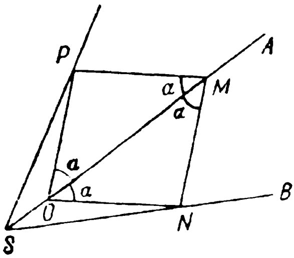
۱۸۵. زاویه‌ای را نصف یا چند برابر کنید.

تقسیم زاویهٔ ASB به دوبخش برابر، طبق شکل ۱۱۴ انجام می گیرد؛ درضمن باید $\overline{SA}=\overline{SB}$ جدا کرد.

روش دو برابر کردن زاویه، درشکل ۱۱۵ نشان داده شده است. نقطهٔ M را روی ضلع SA انتخاب کنید و، سپس، با تکرار قراردادن زاویهٔ α،



شکل ۱۱۴



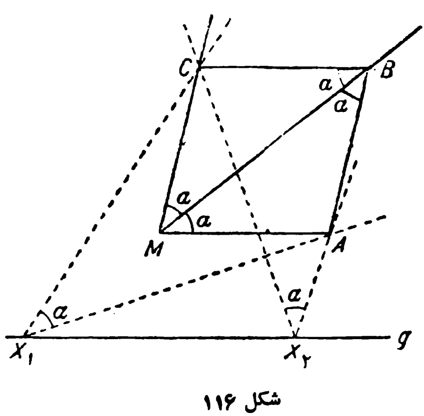
شکل ۱۱۵

نقطه‌های N، O و P را به‌دست آورید.

۱۸۶. رسم زاویهٔ مفروض.

۱۸۷. مسالـهٔ اصلی A: خط راست g و پـاره‌خط MA، موازی g، مفروض‌اند. می‌خواهیم X_1 و X_2، نقطه‌های برخورد خط راست g را بادایرهٔ به مرکز M و شعاع برابر MA پیدا کنیم.

باچند بار استفاده اززاویهٔ α، لوزی $MABC$ را بسازید (شکل ۱۱۶). اکنون اگر زاویهٔ α را درصفحهٔ شکل طوری قرار دهید که ضلع‌های آن از نقطه‌های A و C بگذرند و راس آن بر خط راست g واقع باشد، آن وقت X_1 و X_2، نقطه‌های مجهول بـرخورد خط راست g با دایره خواهند بود، زیرا این نقطه‌ها، همراه بـا نقطه‌های A و C برمحیط دایره‌ای به‌مرکز نقطهٔ M قراردارند.



شکل ۱۱۶

یادداشت. پرگار، خط‌کش، زاویهٔ قائمه و زاویهٔ حاده، از وسیله‌های عادی رسم برای هـر نقشه‌کشی هستند. ما ثابت‌کردیم کـه هر کـدام از این وسیله‌ها، به تنهایی هم، برای حل مساله‌های درجه دوم ساختمانی کافی‌اند.

§۲۶. ساختمان‌های هندسی، به‌کمك خط‌کش یك‌لبه و پاره‌خط ثابت

۱. عمل‌های مورد استفاده دراین‌جا، عبارتند از: رسم خط‌های راست و انتقال یك پاره‌خط.

انتقال پـاره‌خط را می‌توان بـه‌کمك مقیاس طـول انجام داد، یعنی وسیله‌ای‌که اجازهٔ انتقال یك پاره‌خط کاملاً معین را به ما می‌دهد، مثل واحد طول (این وسیله حتی می‌تواند یك نوارکاغذی به‌طول معین باشد).

این پاره‌خط قابل انتقال را تنها می‌توان روی پاره‌خطی‌که رسم شده است و ازنقطهٔ مفروضی واقع برآن، قرارداد.[۹۹]

به این ترتیب، نمی‌توانیم انتهای مقیاس را روی نقطهٔ مفروضی قرار دهیم و، سپس، آن را دوراین نقطه بچرخانیم تا انتهای دیگرآن برخطراست مفروضی قرارگیرد، به‌زبان دیگر، نمی‌توانیم ازاین‌راه مثلث قائم‌الزاویه‌ای بسازیم که‌یکی‌ازضلع‌های‌مجاوربه‌زاویهٔ قائمه آن‌معلوم، و وترآن‌برابرباطول مقیاس ما باشد.

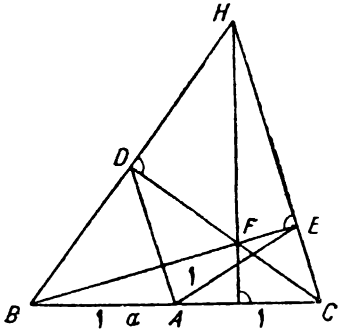
۲. ابتدا باید مساله‌های مقدماتی شتینری را، بـه کمك این وسیله‌های محدود، حل کنیم.

۱۸۸. رسم‌خط‌های راست موازی. (روش‌عمل شبیه §۱۰ است، زیرا با دوبار استفاده از مقیاس، می‌توان روی هرخط راست، دو پاره‌خط برابر به‌دست آورد.)

۱۸۹. چند برابر یا نصف‌کردن پاره‌خط.(شبیه §۱۰.)

۱۹۰. رسم عمود.

می‌خواهیم عمودی بـرخـط راست a رسم‌کنیم (شکل ۱۱۷). نقطهٔ دلخواه A را روی a انتخاب واین پاره خط‌ها را می‌سازیم:



شکل ۱۱۷

$$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = \overline{AE} = ۱$$

(برابر باطول مقیاس) و، BD و CE را رسم می‌کنیم، خط‌راست FH بر a عمود است، زیرا BE و CD ارتفاع‌های مثلث BCH هستند.

۱۹۱. روی خط راست مفروض، زاویهٔ مفروض را بسازید.

خط راست l، زاویهٔ $BSA = \alpha$ و نقطهٔ P را مفروض می‌گیریم (شکل ۱۰۸). می‌خواهیم از نقطهٔ P خط راستی رسم کنیم که باخط‌راست l زاویه‌ای برابر α بسازد.

ازنقطهٔ S، خط راست l' را موازی l رسم می‌کنیم، سپس، از نقطهٔ دلخواه A واقع بر یکی از ضلع‌های زاویهٔ α، عمودهای AB و AC را فرود می‌آوریم. اکنون اگر SD را عمود بر BC رسم کنیم، خواهیم‌داشت:

$$\widehat{DSC} = \widehat{BSA} = \alpha$$

خط راست مجهول x، موازی SD است.

۱۹۲. پاره خط معینی را روی خط راست مفروض و از نقطهٔ مفروض جدا کنید.

پاره‌خط راست g ونقطهٔ P واقع بر g مفروض‌اند. می‌خواهیم نقطهٔ X را بر g طوری پیدا کنیم که داشته باشیم: $\overline{XP} = \overline{AB}$.

مقیاس‌را، که ممکن‌است‌برابرپاره‌خط AB نباشد، برابرواحدمی گیریم (شکل ۱۱۸).

خط راست PQ را، بنا بر مسالهٔ **۱۸۸**، موازی AB رسم می کنیم و نقطه‌های C و D را، به کمك مقیاس، به‌دست می آوریم، سپس QX راموازی CD می کشیم. دراین صورت PX برابر AB خواهد بود.

به‌این ترتیب، برای انتقال یك پاره‌خط دلخواه، تنها وجود یك‌مقیاس طول کافی است.

۱۹۳. زاویهٔ مفروضی را نصف یا چند برابرکنید.

فرض کنید بخواهیم زاویهٔ MAN را نصف کنیم. اگر این پاره‌خط‌ها را بسازیم (شکل ۱۱۹):

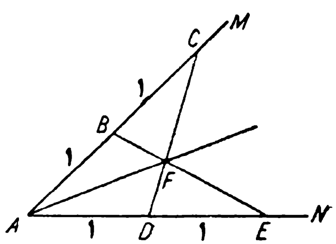
$$\overline{BA}=\overline{BC}=\overline{DA}=\overline{DE}=۱$$

آن وقت، خط راست AF همان نیمساز مجهول است.

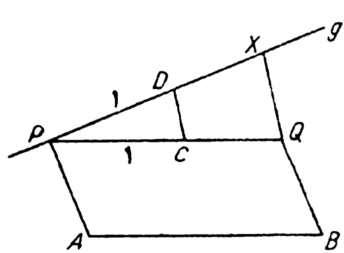
اگر بخواهیم زاویه‌ای را دو برابر کنیم، ازنقطه‌ای واقع بریکی از ضلع‌های زاویهٔ عمودی برضلع دیگر رسم می کنیم و سپس این عمود را به‌اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم.

۳. به‌این ترتیب، به کمك این وسیله‌های محدود رسم، می‌توانیم همهٔ مساله‌های مقدماتی شتینری را حل کنیم.

اکنون، برای این که ثابت کنیم، به‌کمك رسم خط‌های راست وانتقال پاره‌خط‌ها، می‌توان همهٔ مساله‌هایی راکه با پرگار و خط کش حل می‌شوند، حل کرد، باید امکان حل مسالهٔ A را ثابت کنیم، یعنی ثابت کنیم که می‌توان نقطه‌های برخورد خط راست مفروض را با محیط دایره‌ای که مرکز و شعاع آن معلوم است، پیدا کرد، زیرا مسالهٔ پیدا کردن نقطه‌های برخورد دو دایره هم، به‌همین مساله منجرمی‌شود.



شکل ۱۱۹



شکل ۱۱۸

ولی ایـن مسالهٔ اصلی A را نمی‌توان بـا وسیله‌های محدود خـود حل کـرد. مثلاً در حالتی کـه وتـر و یك ضلع مجاور بـه زاویـهٔ قائمه از مثلث قائم الـزاویه‌ای معلوم باشد ، نمی‌توانیم ضلع دیگر این مثلث را پیدا کنیم.

این حکم را، دریکی ازفصل‌هـای آینده، به‌دقت ثابت خواهیم کرد.

۴. بااین وسیله‌های محدود، چه مساله‌هایی را می‌توان حل‌کرد؟

به‌این پرسش می‌توان به‌طورکامل پاسخ گفت.

a) اگر a، b، c،... پاره‌خطهای مفروضی باشند، به‌کمك رسم‌خطهای راست وانتقال پاره‌خطها، می‌توان این عبارت‌ها را رسم‌کرد:

$$a+b, \quad a-b, \quad \frac{a\cdot b}{c}$$

(که برای آن‌ها تنها بـایـد ازکنار هم گذاشتن پاره‌خطها و رسم خطهای راست موازی استفاده‌کرد) وهم عبارت

$$\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}$$

(که باساختن زاویهٔ قائمه وپهلوی هم گذاشتن پاره‌خطها به‌دست می‌آید).

عبارت‌های بغرنج‌تری را هم می‌توان ساخت، مثل عبارت

$$w=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}$$

کـه برای رسم آن، ابتـدا $u=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$ و سپس $w=\sqrt{u^{۲}+z^{۲}}$ را می‌سازیم.

به‌کمك این وسیله‌های محدود رسم، می‌تـوان عبارت $v=a\sqrt{n}$ را ساخت‌که، درآن، a یك پاره‌خط مفروض و n عددی درست‌است.

درواقع

$$v=\sqrt{a^{۲}+a^{۲}+\dots+a^{۲}}$$

رامی‌توان به‌کمك‌رسم‌عمودها وپهلوی هم‌گذاشتن پاره‌خطها، به‌دست‌آورد.

مثلاً، می‌توان پاره‌خط زیر را رسم‌کرد:

$$x=a\sqrt{۳۳-۱۲\sqrt{۲}}$$

زیرا

$$x=\sqrt{(۴a)^۲+(۲a\sqrt{۲}-۳a)^۲}$$

ابتدا پاره‌خط $۲a\sqrt{۲}$ را به‌عنوان وتـر مثلث قائم‌الزاویه‌ای کـه هر کدام از ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن بـرابـر $۲a$ است، رسم می کنیم، سپس پاره‌خط x را به عنوان وترمثلث قائم‌الزاویه‌ای با ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمهٔ $۴a$ و $(۲a\sqrt{۲}-۳a)$ به‌دست می آوریم.

b) به‌این ترتیب، هرعبارتی راکه بـه‌صورت مجموع، تفاضل، ضرب و تقسیم پاره‌خطهای مفروض باشد ویـا بـا ریشهٔ دوم مجموع مجذورهای این پاره‌خطها بیان شود، می‌توان رسم‌کرد.

بنا بر این، هرمسالهٔ‌ساختمانی که، منجر به‌عبارتی بشود که، به‌جزعمل‌های گویا، شامل‌ریشهٔ دوم‌مجموع مجذورها باشد، به‌کمك‌این وسیله‌های محدود، قابل حل است.

مثلاً مسالهٔ مالفاتی (۱§) برای ما قابل حل‌است، زیرا منجر به‌عبارتی می‌شود که، به‌جزعمل‌های گویا، شامل‌ریشهٔ دوم‌هایی ازمجموع‌مجذورهاست.

اگر s ، طول ضلع یك مثلث متساوی‌الاضلاع باشد، ارتفاع آن برابر است با

$$h=\frac{s}{۲}\sqrt{۳}$$

بنابراین، مثلث متساوی‌الاضلاع را می‌توان، به‌کمك این وسیله‌های محدود، رسم کرد.

اگر r شعاع دایره باشد، داریم:

$$c_{۱۰}=\frac{۱}{۲}r(\sqrt{۵}-۱) \quad \text{و} \quad c_{۵}=\sqrt{c_{۱۰}^{۲}+r^{۲}}$$

($c_{۱۰}$ و $c_{۵}$، به‌ترتیب، طول ضلع‌های ده‌ضلعی وپنج‌ضلعی منتظم محاطی‌اند).

هردو چندضلعی را می‌توان، تنها با رسم خط‌های راست و انتقال پاره‌خط‌ها، به‌دست آورد.

۵. a) ولـی عبـارت $\sqrt{a^2-b^2}$ (و بنابـرایـن، عبارت $\sqrt{ab}$ را) نمی‌توان با این وسیله‌های محدود رسم کرد، کـه اثبات دقیق آن را، بعداً خواهیم دید.

به این ترتیب، هر مساله‌ای را، کـه ضمن محاسبه منجر به ریشهٔ دوم تفاضل دو مجذور و یا ریشهٔ دوم حاصل ضرب دو پاره‌خط بشود، نمی‌توان حل کرد.

b) خط راست g و دو نقطهٔ A و B واقع در بیرون آن را، مفروض می‌گیریم. می‌خواهیم دایره‌ای رسم کنیم که از نقطه‌های A و B بگذرد و بر خط راست g مماس باشد.

اگر نقطهٔ برخورد خط‌راست AB را بـا خط راست g، به C و نقطهٔ مجهول تماس را به X نشان دهیم، می‌دانیم که باید داشته باشیم:

$$\overline{CX}=\sqrt{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}$$

با وسیله‌های محدود خود، نمی‌توانیم $\sqrt{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}$ را بسازیم و، بنابـراین، می‌توانیم مطمئن شویم که، مسالهٔ مفروض را، ازاین راه و یا ازراه دیگری، نمی‌توانیم حل کنیم.

c) به‌کمک این وسیله‌های محدود، نمی‌توانیم مسالهٔ آپولونیوس دربارهٔ دایره‌های مماس را حل کنیم.

البته، غیرقابل حل بودن مساله، به‌شرطی است که ازسه دایرهٔ مفروض، ضمن رسم استفاده‌ای نکنیم، زیـرا در غیر این صورت، طبق نظریـهٔ شتینر، خواهیم تـوانست این مسالـه را تنها بـا رسم خـط‌های راست حل کنیم. در واقع، این سه دایره، بـه وسیلهٔ مرکزها و شعاع‌های خود داده شده‌اند و دایرهٔ رسم شده‌ای روی صفحهٔ شکل در اختیار نداریم. در چنین صورتی است که مسالهٔ آپولونیوس دربارهٔ مماس‌ها ، قابل حل به کمک وسیله‌های محدود ما نیست.

§۲۷. ساختمان‌های هندسی به‌کمك نیمسازنگار

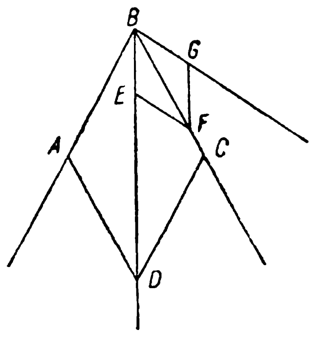
فلدبلوم وسیله‌ای را داده است که، به‌کمك آن، می‌توان زاویه‌را نصف کرد. او سپس، به مطالعهٔ ساختمان‌هایی می‌پردازد که به کمك رسم خطهای راست و تقسیم زاویه بــه دوبخش برابر، قابل‌حل‌اند. او روشن کرد که همهٔ ساختمان‌های هندسی درجهٔ دوم را نمی‌توان ازاین راه به‌انجام رساند، بلکه تنها همان مساله‌هایی قابل‌حل‌اند که می‌توانستیم به‌کمك رسم خطهای‌راست و انتقال پاره‌خطها، حل کنیم.

۱. این‌وسیله، یعنی نیمسازنگار، به‌شکل لوزی است (شکل ۱۲۰)، که روی همهٔ راس‌های خود حرکت می‌کند و، درضمن، دو ضلع ویك قطر آن ادامه پیداکرده‌اند.

اگر دراین وسیله، نقطه‌های A و C را به‌هم نزدیك‌کنیم، راس‌های B و D ازهم دورمی‌شوند و، برعکس. ولی خطراست BD، درهرحال، زاویهٔ ABC را نصف می‌کند.

فلدبلوم ازاین وسیله، تنها بــرای نصف‌کردن زاویه استفاده می‌کند، نه برای دو بــرابــرکــردن آن.[100] بنابراین، برای حل مساله‌های زیرهم، به‌دشواری‌هایی بر می‌خوریم.

۲. خط راست g و نقطهٔ A واقع بــر آن، مفروض‌اند. می‌خواهیم از نقطهٔ A عمودی بر g اخراج کنیم.



شکل ۱۲۰

برای این‌که بتوانیم راه حل فلدبلوم را بدهیم، باید قبل از آن، دو گزاره از دورهٔ اختصاصی هندسهٔ تصویری را مطرح کنیم.

a) اگر a، b، c و a'، b'، c'، نیم خطهای متناظر دو دستهٔ تصویری باشند، نیم‌خط d' ازدستهٔ دوم را، که متناظر با نیم‌خط d ازدستهٔ اول است، می‌توان تنها با رسم‌خطهای راست پیداکرد.

b) اگرهردوخط عمودبرهم را دریك‌دسته، متناظرهم بگیریم، آن‌وقت، همهٔ نیم‌خطهای دسته به‌زوج نیم‌خطهای متناظر تقسیم می‌شوند.

به‌این ترتیب، اگر a، b، c و a'، b'، c' مفروض باشند وضمناً داشته باشیم: $a \perp a'$، $b \perp b'$، $c \perp c'$، آن‌وقت برای هرنیم‌خط d می‌توان نیم‌خط d' را عمود بر آن، تنها به‌وسیلهٔ رسم خطهای راست، به‌دست آورد.

c) اکنون به مسالهٔ خود برمی گردیم.

خطراست دلخواه h را ازنقطهٔ A می گذرانیم، نیمساز a اززاویهٔ hg (به‌کمك نیمسازنگار) ونیمساز a' اززاویهٔ مجانب آن را پیدا می‌کنیم؛ a' بر a عمود است.

اگر از A، خط راست دوم k را رسم کنیم و دوباره نیمسازهای زاویهٔ kg و زاویهٔ مجانب آن را به دست آوریم، به‌دو خط راست عمود بر هم b و b' می‌رسیم؛ به‌همین ترتیب، دوخط راست دیگر عمود برهم c و c' را پیدا می‌کنیم. خط راست مجهول g'، عمودبر g ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:[101]

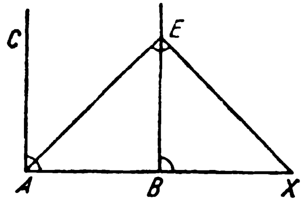
$$(a'b'c'g')\overline{\wedge}(abcg)$$

یادداشت. اگر حق داشتیم به‌کمك نیمسازنگار، زاویه‌ای را دو برابر کنیم، می‌توانستیم این مساله را خیلی ساده‌تر حل کنیم.

۳. دویا چند برابرکردن یك پاره‌خط.

برای دو برابر کردن پاره‌خط AB (شکل ۱۲۱)، ابتدا AC و BE را عمود بر AB می‌کشیم؛ سپس زاویهٔ A را نصف و EX را عمود بر AE رسم می‌کنیم. دراین‌صورت $AX = ۲AB$.

۴. رسم موازی به‌کمك مسالهٔ ۳ انجام می‌گیرد.



شکل ۱۲۱

۵. دوران پاره‌خط دور یکی از دوانتهای آن.

پاره‌خط AB وخط راست g را که ازیکی از دوانتهای پاره‌خط AB گذشته است، درنظر می گیریم. می‌خواهیم نقطهٔ C را روی خط‌راست g طوری پیدا کنیم که داشته باشیم: $\overline{AC}=\overline{AB}$.

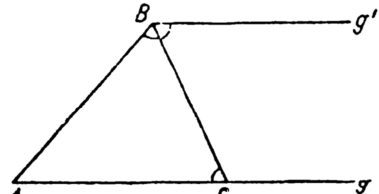
از نقطهٔ B، خط‌راست g' را موازی g بکشید (شکل ۱۲۲) و زاویهٔ به‌راس B را نصف کنید.

۶. پاره‌خط مفروضی را روی خط راست مفروض، ازنقطه‌ای مفروض، منتقل کنید.

پاره‌خط مفروض را، موازی باخود منتقل کنید تا وقتی که یکی از دو انتهای آن برنقطهٔ مفروض قرار گیرد. سپس آن را دوراین نقطه دوران دهید تا برخط راست مفروض منطبق شود.

یادداشت. با نصف کردن زاویه‌ها و رسم خطهای راست، می‌توان پاره‌خط را به هرجایی منتقل کرد. ازطرف دیگر، چون به‌کمك انتقال پاره‌خطها ورسم خطهای راست می‌توان هرزاویه‌ای را نصف کرد، بنابراین «نیمسازنگار» و «مقیاس طول» به مفهومی هم‌ارز یکدیگرند.

هر مساله‌ای که به کمك مقیاس طول و رسم خطهای راست



شکل ۱۲۲

قابل حل باشد، به‌کمك نیمسازنگار ورسم خطهای راست هم‌قابل حل است، و برعکس.

همچنین، اگر مساله‌ای را نتوان بـا رسم خطهای راست و جا به‌جا-کردن پاره‌خطها بـادقت حل‌کرد، به‌کمك رسم خطهای راست ونصف‌کردن زاویه هم نمی‌توان حل‌کرد.

فصل پنجم

مسأله‌های درجهٔ اول ودرجهٔ دوم

§۲۸. پیش‌قضیه‌هایی ازهندسهٔ تصویری

برای بحث خود در اینجا، به‌چند قضیه ازهندسهٔ تصویری نیازداریم. به‌همین مناسبت، بهتر دیدیم، درابتدای این فصل همهٔ آن‌چه‌راکه نیازداریم، مطرح کنیم.

۱. نسبت مضاعف، رشته نقطه‌های توافقی وشعاع‌های توافقی، گستره بریک خط راست.

a) اگر A، B، C و D چهارنقطه از خطراستی باشند، عبارت

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = (ABCD)$$

را نسبت مضاعف یا نسبت غیرتوافقی (یا نسبت ناهمساز) این‌چهار نقطه گویند.

همان‌طور که می‌دانیم، بنابرقضیهٔ پاپوس، این نسبت مضاعف ضمن تصویر، تغییر نمی‌کند، یعنی اگر این‌چهار نقطه را برخط راست دیگری تصویرکنیم، نسبت مضاعف مربوط به‌نقطه‌های تصویر، با نسبت مضاعف مربوط به‌نقطه‌های مفروض، برابر است.

اگر چهار نیم‌خط یك دسته، یك‌خط راست در چهارنقطه‌ای که نسبت مضاعف تشکیل می‌دهند، قطع کنند، گویند این‌چهار نیم‌خط، به‌نسبت مضاعف قرار دارند.

اگر چهار نقطه، نسبت مضاعفی برابر ۱ — داشته باشند، چهار نقطهٔ توافقی (یا چهار نقطهٔ همساز) نامیده می‌شوند.

چهار نیم‌خط یک دسته را، شعاع‌های توافقی (یا همساز) گویند، وقتی‌که خط راستی را به‌نسبت توافقی قطع کرده باشند.

b) اگر A و A' دو نقطه از خط راستی باشند، مجموعه‌ای نامتناهی از زوج نقطه‌های B و B' وجود دارد که، همراه با نقطه‌های A و A'، چهار نقطهٔ توافقی را تشکیل می‌دهند؛ در ضمن نقطه‌های A و A' به‌وسیلهٔ دو نقطهٔ B و B' ازهم جدا می‌شوند[۱۰۲].

اگر نقطهٔ B در طول خط راست جابه‌جا شود (به‌فرض ثابت بودن A و A')، نقطهٔ B' هم روی خط راست جابه‌جا خواهد شد. در حالت خاص، وقتی‌که نقطهٔ B در وسط پاره‌خط AA' قرار گیرد، نقطهٔ B' به‌بی‌نهایت می‌رود.

اگر a و a' ضلع‌های یک‌زاویه و b و b' نیمسازهای این زاویه (یعنی نیمسازهای دوزاویهٔ بین خط‌های راست a و a') باشند، آن‌وقت، چهار نیم‌خط a، b، a'، b' تشکیل دسته‌ای‌ازشعاع‌های‌توافقی‌را می‌دهند.[۱۰۳]

c) دو باره دو نقطهٔ A و A' را در نظر بگیرید. مجموعهٔ همهٔ زوج نقطه‌هایی که دو نقطهٔ A و A' را به نسبت توافقی تقسیم کنند (تعداد این زوج نقطه‌ها، بی‌نهایت است)، گستره نامیده می‌شود.

اگر روی همین خط راست AA'، دو نقطهٔ دیگر، M و M' داده شده باشد، آن‌وقت، زوج نقطه‌هایی که دو نقطهٔ M و M' را به‌نسبت توافقی تقسیم می‌کنند، گستره دیگری را تشکیل می‌دهند.

به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که، این دوگستره، تنها یک‌زوج نقطهٔ مشترک دارندکه موهومی هم می‌تواند باشد.

بنابراین، اگر A، A' و M، M' دو زوج نقطه واقع بریک‌خط راست باشند، تنها یک‌زوج نقطهٔ X و X' پیدا می‌شود که هم نقطه‌های A و A' وهم نقطه‌های M و M' را به‌نسبت توافقی تقسیم می‌کند.[۱۰۴]

سپس، a و a' را دو خط راست دلخواه واقع برصفحه و S را نقطهٔ برخورد آن‌ها می‌گیریم. اگر دو نقطهٔ B و B' از همین صفحه طوری

باشند که خطهای راست b و b'، که آن‌ها را به‌نقطهٔ S وصل می‌کنند، به‌صورت توافقی نسبت به‌خطهای راست a و a' قرار گیرند، می‌گویند: خطهای راست a و a'، به‌وسیلهٔ نقطه‌های B و B'، به‌صورت توافقی قرار گرفته‌اند.

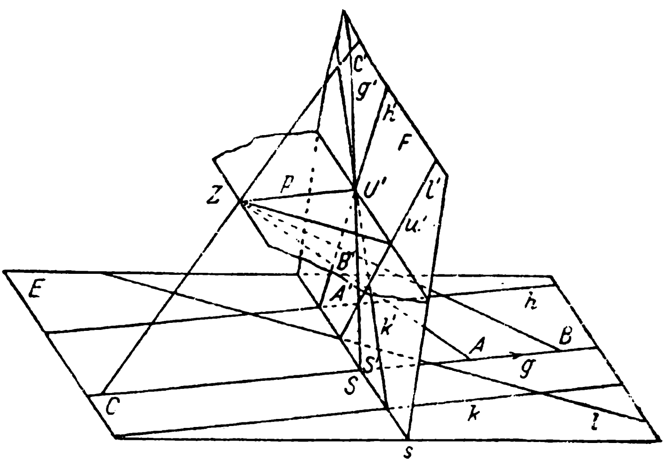
در حالت خاص، اگر a ، a'، m، m' چهار نیم‌خط از یك دسته و g خط راست دلخواهی از صفحه باشد، روی این‌خط راست، تنها یك‌زوج نقطهٔ X و X' وجود دارد که، به‌وسیلهٔ آن‌ها، هم دونیم‌خط a و a' و هم دونیم خط m و m' به‌صورت توافقی تقسیم می‌شوند.

۲. پرسپکتیو نقشه‌های فضایی

a) تصویر و برخورد ، یعنی دو عمل اصلی هندسهٔ تصویری، منجر به‌مفهوم عنصرهای بی‌نهایت دور می‌شوند،که برای بحث بعدی ما اهمیت زیادی دارد و، به‌همین مناسبت، باید دربارهٔ آن‌ها صحبت کرد.[۱۰۵]

E و F را دو صفحهٔ دلخواه، s را خط راست فصل مشترك آن‌ها و Z را نقطهٔ دلخواهی از فضا می‌گیریم (شکل ۱۲۳).

فرض می‌کنیم، نقطه وخطهای راست صفحهٔ E، از نقطهٔ Z برصفحهٔ F تصویر شوند.



شکل۱۲۳

g را خط راست دلخواهی از صفحهٔ E را می‌گیریم (شکل ۱۲۳). g'، یعنی تصویر این خط راست را برصفحهٔ F می‌توان به این ترتیب پیدا کرد که دو نقطهٔ A و B را روی g انتخاب کنیم و تصویرهای آن‌ها را برصفحهٔ F به‌دست آوریم. خط راست g' باید خط راست g را در نقطه‌ای مثل S از خط راست s قطع کند.

b) اگر نقطهٔ B، در جهت پیکان، روی خط راست g دور شود، نقطهٔ B' هم جای خود را عوض می‌کند؛ به خصوص، وقتی که نقطهٔ B بی‌نهایت دورشود، تصویر آن در نقطهٔ U' ازخط راست g' قرار می‌گیرد، یعنی در جایی که خط راست p، که با g موازی است، صفحهٔ F را قطع می‌کند (شکل ۱۲۳).

اگر دوباره نقطهٔ B را روی خط‌راست g، ولی درجهت‌مخالف‌پیکان، حرکت دهیم، بازهم تصویر آن‌جا به‌جا می‌شود و، وقتی که نقطهٔ B بی‌نهایت دور شود، تصویر آن دوباره بر U' قرار می‌گیرد.

به‌این‌ترتیب، عنصرهای بی‌نهایت دورخط راست g، در یك نقطهٔ U'، تصویر می‌شوند. این حقیقت، ما را به‌این فرض می‌رساند که خط راست، دارای یك نقطهٔ بی‌نهایت دور است. به‌این مفهوم، می‌توان از نقطهٔ بی‌نهایت دور یا نقطهٔ ناویژهٔ خط راست g صحبت کرد.

g'، تصویر خط راست g را به‌این ترتیب هم می‌توان به‌دست‌آورد که نیم‌خط p را از Z موازی خط راست g رسم کنیم تا صفحهٔ F را در U' قطع کند و، سپس، U' را به S وصل کنیم، زیرا U' تصویر نقطهٔ ناویژهٔ بی‌نهایت دور خط راست g، و S تصویر اثرخط راست g برصفحهٔ تصویر F است.

اگر چند خط موازی g، h و k برصفحهٔ E داشته باشیم، تنها یك خط راست وجود دارد که از نقطهٔ Z بگذرد و با آن‌ها موازی باشد؛ بنابراین، تصویرهای این خط‌های راست موازی، ازیك نقطه می‌گذرند.

از همین‌جا به‌این فرض می‌رسیم که، خط‌های راست موازی، یکدیگر را در یك نقطهٔ بی‌نهایت دور قطع می‌کنند.

c) بازهم یك‌خط‌راست l روی صفحه انتخاب و تصویر نقطهٔ بی‌نهایت

دور آن‌را جست و جو می‌کنیم. برای این منظور، از Z نیم‌خطی موازی l رسم می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا صفحهٔ F را قطع کند (شکل ۱۲۳).

اگر خط راست l جابه‌جا شود، خط‌راست موازی آن نیز (که از Z گذشته است) جابه‌جا می‌شود، ولی در هرحال روی صفحه‌ای است که از Z موازی صفحهٔ E رسم می‌شود.

به‌این ترتیب، تصویر نقطه‌های بی‌نهایت دور همهٔ خط‌های راست صفحه، روی خط راست کاملاً معینی از صفحهٔ F قرار دارند که آن را u' می‌نامیم؛ این خط راست، فصل مشترك صفحهٔ F با صفحه‌ای است که از Z موازی صفحهٔ E رسم شود:

همهٔ عنصرهای بی‌نهایت‌دورصفحه، بریك‌خط‌راست نگاشته می‌شوند.

اگر تصویر شکلی که شامل عنصرهای بی‌نهایت دور نیست، یك خط راست از آب درآید، آن‌وقت، خود شکل هم باید خط راست باشد. بنابراین، به‌این فرض می‌رسیم: صفحهٔ E دارای یك‌خط راست بی‌نهایت دور یا یك خط راست ناویژه است.

با بررسی مشابهی در فضا، به‌این گزاره می‌رسیم: صفحه‌های موازی دارای یك خط راست بی‌نهایت دور مشترك هستند؛ همهٔ عنصرهای بی‌نهایت دور فضا، بریك‌صفحه قرار دارند.

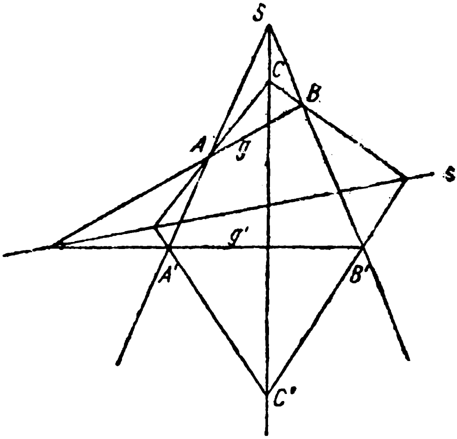
۳. هم‌راستائی مرکزی در صفحه، یا همسانی

نقطهٔ S، خط راست s (که می‌تواند از S هم بگذرد) و دو نقطهٔ A و A'، واقع بر نیم خطی که از S می‌گذرد، وهمه روی یك‌صفحه، داده شده است (شکل ۱۲۴).

نقطهٔ دلخواه B را روی همین صفحه انتخاب وآن‌را باخط‌راست g به A وصل می‌کنیم. نقطهٔ برخورد خط‌های راست g و s را، با خط‌راست g'، به A' وصل می‌کنیم که خط راست SB را در نقطهٔ B' قطع می‌کند (شکل ۱۲۴).

هردونقطه‌ای مثل B و B' را متناظر یکدیگر می‌نامیم.

اکنون اگر نقطهٔ سوم C را داده باشند، می‌توانیم نقطهٔ C'، متناظر C، را، یا به‌کمك دونقطهٔ A و A' ویا به‌کمك نقطه‌های B و B' پیداکنیم.



شکل۱۲۴

درهردوحالت، با توجه به‌قضیهٔ مربوط به‌مثلث‌های پرسپکتیو (§۷را ببینید)، منجر به‌یك نقطهٔ C' می‌شود. اگر D، E، F، ... را نقطه‌های بعدی صفحه بگیریم، نقطه‌های متناظر آن‌هارا می‌توان، باتکیه برهردو نقطهٔ متناظر دیگر، به‌دست آورد.

هردوخط راستی راکه رابطه‌ای مثل خطهای راست g و g' یا h و h' یا k و k' در شکل ۱۲۴ با هم داشته باشند،خطهای راست متناظر گویند.

به‌این ترتیب، هردونقطهٔ متناظر برخط راستی قرار دارند که از S می‌گذرد و هردو خط راست متناظر، در نقطه‌ای روی s یکدیگر را قطع می‌کنند. هرنقطه از خط راست s متناظر با خودش است، همچنین، هرخط راستی‌که از S بگذرد، با خودش متناظر است. نقطهٔ S متناظر با خودش و، همچنین، خط‌راست s متناظر با خودش است.

اگر نقطهٔ P روی خط راست g حرکت کند، نقطهٔ P'، متناظر P، روی خط راست g' که متناظر g است، حرکت می‌کند. اگر خط راست g دور نقطه‌ای مثل Q دوران کند، آن‌وقت خط راست g'، متناظر g، دور نقطهٔ Q'، متناظر Q دوران می‌کند.

تناظری‌که، به‌این طریق، بین‌نقطه‌ها وخطهای راست یك‌صفحه وجود داشته باشد، هم راستائی مرکزی یا همسانی (ویا تناظر یك به‌یك) نامیده

می‌شود. اغلب، در هندسهٔ ترسیمی ودر مسأله‌های هندسی، با این‌گونه تناظر برخورد داریم.

نقطهٔ S را مرکز و خط‌راست s را محور هم‌راستائی گویند.

عنصرهای اصلی S، s و A، A' می‌توانند به‌صورت‌های مختلفی، نسبت به‌هم، قرار گیرند. در این‌جا، به‌بعضی حالت‌های خاص آن، که برای کار آیندهٔ ما اهمیت دارند، می‌پردازیم.

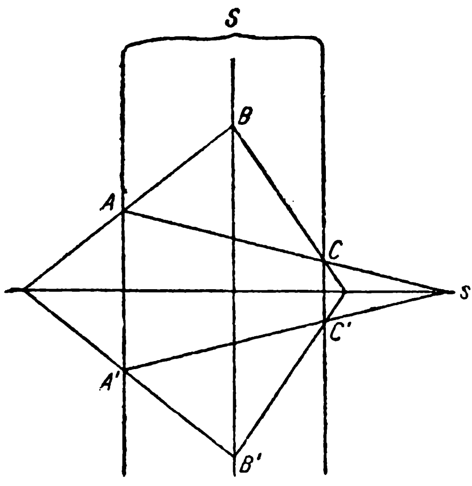
a) پاره‌خط AA' برمحور s عمود است و به‌وسیلهٔ آن نصف می‌شود (شکل ۱۲۵). در ضمن نقطهٔ S، مرکز هم‌راستائی، که باید روی خط راست AA' قرارگیرد در بی‌نهایت واقع است.

دومثلث ABC و $A'B'C'$، مساوی معکوس یکدیگرند، یعنی هر کدام از آن‌ها را می‌توان از دوران دیگری دور محور هم‌راستائی به‌دست‌آورد.

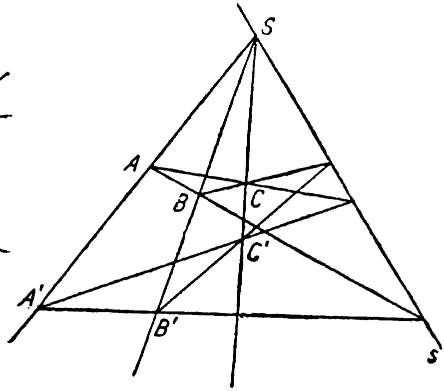
در این حالت، دو شکل، قرینه یکدیگر نسبت به محور هم‌راستائی هستند؛ بنابراین، تقارن، حالت خاصی از همسانی است.

اگر دو شکلی را که قرینهٔ یکدیگرند ، روی صفحهٔ جدیدی تصویر کنیم، حالت کلی همسانی به‌دست می‌آید.

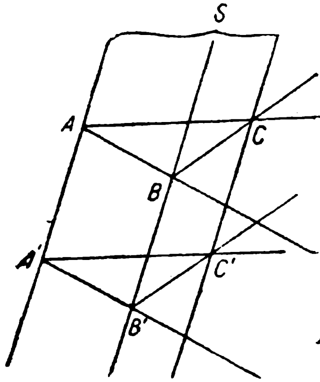
b) محور هم‌راستائی از نقطهٔ S می‌گذرد.



شکل ۱۲۵



شکل ۱۲۶



شکل ۱۲۷

ساختمان نقطه‌ها و خط‌های راست متناظر، در این‌حالت، شبیه حالت کلی است (شکل ۱۲۶).

c) اگر S و s را عنصرهای بی‌نهایت دوربگیریم، یعنی اگرخط‌راست بی‌نهایت دور صفحه را برای s، و یکی از نقطه‌های آن‌را برای S انتخاب کنیم، آن‌وقت، خط‌های راستی‌که نقطه‌های متناظر را به‌هم وصل می‌کنند، با هم موازی می‌شوند، به‌جز آن، هردو خط راست متناظر هم، با یکدیگر موازی‌اند (شکل ۱۲۷).

در این حالت، دو مثلث متناظر ABC و $A'B'C'$ هم‌نهشت‌اند، یعنی می‌توان یکی را، با انتقال موازی بردیگری منطبق‌کرد.

به‌این ترتیب، انتقال موازی هم، حالت خاصی از همسانی است و، ضمن تصویر بریك‌صفحهٔ جدید، به‌حالت کلی همسانی تبدیل می‌شود.

۴. نقطه‌های سیکلیك موهومی، گسترهٔ مطلق

a) دستگاه محورهای مختصات قائمی را مفروض می‌گیریم. معادلهٔ هردایره را، نسبت به‌این دستگاه محورهای مختصات، می‌توان چنین‌نوشت:

$$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$$

که‌ضریب‌های a، b و c، برای‌هردایرهٔ مفروض، مقدارهایی معین‌وثابت‌اند. می‌خواهیم، نقطه‌های $J_۱$ و $J_۲$ را، که از برخورد این دایره با خط

راست بی‌نهایت دور صفحه به‌دست می‌آید، پیدا کنیم. برای این منظور $x=\frac{x'}{t'}$ و $y=\frac{y'}{t'}$ می‌گیریم و معادلهٔ دایره را به‌صورت متجانس خود درمی‌آوریم:

$$x'^{2}+y'^{2}+ax't'+by't'+ct'^{2}=0$$

برای نقطه‌های بی‌نهایت دور باید داشته باشیم $t'=0$، بنابراین

$$x'^{2}+y'^{2}=0$$

به‌نحوی که

$$\frac{y'}{x'}=\frac{y}{x}=\pm i$$

به‌این ترتیب، تانژانت زاویه‌هایی که خطهای راست OJ_1 و OJ_2 با محور x می‌سازند، برابر $+i$ و $-i$ است، یعنی این‌زاویه‌ها بستگی به a، b و c ندارند.

از این‌جا نتیجه می‌شود که: همهٔ دایره‌های واقع برصفحه، خط راست بی‌نهایت دور صفحه را در دو نقطهٔ کاملاً معین J_1 و J_2 قطع می‌کنند که آن‌ها را نقطه‌های سیکلیك موهومی گویند.

بنابراین، دایره را می‌توان یك مقطع مخروطی دانست که از نقطه‌های سیکلیك موهومی می‌گذرد. به‌این دلیل است که دایره، با سه نقطهٔ خود، معین می‌شود.

b) از رابطه‌های بسیاری که می‌توان برای نقطه‌های سیکلیك موهومی نوشت، تنها از آن‌هایی یاد می‌کنیم که برای کار بعدی ما مفید است.

ابتدا، این قضیهٔ مهم را ثابت می‌کنیم.

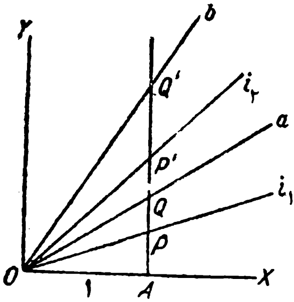
اگر a و b دوخط راست عمود برهم باشند، به‌وسیلهٔ نقطه‌های سیکلیك موهومی به‌نسبت توافقی تقسیم می‌شوندوبرعکس، اگر دوخط راست به‌وسیلهٔ نقطه‌های سیکلیك موهومی به‌نسبت توافقی تقسیم شوند، این‌دو خط راست برهم عمودند.

اثبات. XOY را یك دستگاه محورهای مختصات قائم می‌گیریم

(شکل ۱۲۸) ؛ فرض می‌کنیم a و b دوخط راست دلخواه و i_1 و i_2 دو خط راستی باشند که O را به‌نقطه‌های سیکلیك موهومی وصل می‌کنند. بـا توجه به‌آن چه در a) گفتیم، معادلهٔ خطهای راست موهومی i_1 و i_2 به‌این صورت است:

$$i_1: \qquad y=ix$$

$$i_2: \qquad y=-ix$$



شکل۱۲۸

معادلهٔ خطهای راست a و b راکه از O می‌گذرند، می‌نویسیم:

$$a: \qquad y=mx$$

$$b: \qquad y=nx$$

از نقطهٔ A واقع برمحور x و با فاصلهٔ ۱ از O، خطراستی موازی محور y رسم و نقطه‌های برخورد آن‌را با چهار خط راست i_1، i_2، a و b پیدا می‌کنیم.

نسبت مضاعف چهار نیم‌خط ، بـا نسبت مضاعف نقطه‌هـای برخورد به‌دست می‌آید، یعنی

$$(i_1 i_2 ab)=(PP'QQ')=\frac{\overline{PQ}}{\overline{P'Q}}:\frac{\overline{PQ'}}{\overline{P'Q'}}$$

در ضمن داریم:

$$\overline{AP}=+i, \quad \overline{AP'}=-i, \quad \overline{AQ}=m, \quad \overline{AQ'}=n$$

بنا بر این

$$(PP'QQ')=\frac{-i+m}{+i+m}:\frac{-i+n}{+i+n}$$

اگر دوخط راست a و b برهم عمود باشند، باید داشته باشیم:

$n=-\frac{1}{m}$ و ازآن‌جا

$$(PP'QQ')=\frac{-i+m}{+i+m}:\frac{-i-\frac{1}{m}}{+i-\frac{1}{m}}$$

که ازآن نتیجه می‌شود:

$$(PP'QQ')=-1$$

و بخش اول قضیه را ثابت می‌کند.

اکنون فرض کنید که، برعکس، داشته باشیم:

$$(PP'QQ')=-1$$

یعنی

$$\frac{-i+m}{+i+m}=\frac{+i-n}{+i+n}$$

که ازآن به‌دست می‌آید:

$$m=-\frac{1}{n}$$

c) رابطهٔ مهم دیگری را می‌آوریم که تصور تصویری زاویه را به‌ما می‌دهد وبه‌رابطهٔ لاگر ($Laguerre$) معروف است.

دوباره نسبت مضاعف چهار نیم‌خط i_1، i_2، a و b را می‌نویسیم؛ i_1 و i_2 خطهای راستی‌اند که از O به‌نقطه‌های سیکلیك موهومی وصل شده‌اند، و a و b دوخط راست دلخواه که از O می‌گذرند (شکل ۱۲۸).

$$(i_1 i_2 ab)=(PP'QQ')=\frac{-i+m}{+i+m}:\frac{-i+n}{+i+n}$$

اگر فرض کنیم $m=tg\alpha$ و $n=tg\beta$، به‌دست می‌آید:

$$(PP'QQ')=\frac{-i\cos\alpha+\sin\alpha}{+i\cos\alpha+\sin\alpha}:\frac{-i\cos\beta+\sin\beta}{+i\cos\beta+\sin\beta}=$$

$$=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha-i\sin\alpha}:\frac{\cos\beta+i\sin\beta}{\cos\beta-i\sin\beta}$$

با توجه به‌رابطهٔ اولر می‌دانیم:

$$\cos z+i\sin z=e^{iz}$$

به‌این ترتیب، خواهیم داشت:

$$(PP'QQ')=\frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}}:\frac{e^{i\beta}}{e^{-i\beta}}=e^{2i\alpha}:e^{2i\beta}=e^{2i(\alpha-\beta)}$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$\alpha-\beta=\frac{1}{2i}lDV$$

که درآن DV عبارت است از نسبت مضاعف چهار نیم‌خط i_1، i_2، a و b، یعنی نسبت مضاعف ضلع‌های زاویه و دوخط راست موهومی که از رأس آن می‌گذرند (دوخط راست اخیر را، خط‌های راست ایزوتروپ می‌نامند).

بنابراین، دوزاویه وقتی برابرند که، نسبت مضاعف حاصل ازضلع‌های زاویهٔ اول با نقطه‌های سیکلیک موهومی، برابر باشد با نسبت مضاعف‌حاصل از ضلع‌های زاویهٔ دوم با نقطه‌های سیکلیک موهومی.

۵. ویژگی‌های مجسم و ویژگی‌های متریك شکل‌های هندسی.

a) ویژگی‌های یك‌شکل را می‌توان به‌دو مقوله تقسیم کرد.

α) ویژگی‌های مجسم شکل (ویژگی‌های مربوط به موقعیت شکل و ویژگی‌های نموداری و رسمی آن). این ویژگی‌ها، در ارتباط با نقطه، خط راست، مقطع‌های مخروطی وغیره هستند و تنها معرف وضع استقرار

این نقطه‌ها، نسبت به‌یکدیگرند.

مثلاً، وقتی که می‌گوئیم: سه‌خط راست از یك نقطه می‌گذرند، چند نقطه از یك شکل روی یك خط راست قرار دارند، خط راستی برمقطع مخروطی مماس است یا دو شکل در تناظر یك به‌یك قرار دارند، همه‌جا به‌ویژگی‌های مجسم شکل نظر داریم.

β) وقتی که از ویژگی‌های متریك شکل صحبت می‌کنیم، در واقع با مفهوم‌های مربوط به‌طول پاره‌خط و اندازهٔ زاویه‌ها سروکار داریم.

مثلاً، وقتی که در شکلی، دو پاره‌خط برابر یا دو زاویهٔ برابر وارد شده باشد، یا شامل زاویهٔ قائمه یا زاویهٔ ۶۰ درجه باشد، یا اگر مقطع مخروطی وارد دراین شکل، دایره باشد وغیره، همه‌جا با ویژگی‌های متریك شکل سروکار داریم.

γ) همچنین، می‌توان از ویژگی‌های تصویری یك شکل صحبت کرد.

یك ویژگی از شکل را وقتی تصویری گویند که، ضمن هرتصویر دلخواهی برصفحهٔ دیگر، تغییر نکند، یعنی منجر به‌همین ویژگی در تصویر شکل بشود.

هرویژگی مجسم شکل، در ضمن ویژگی تصویری آن نیز می‌باشد، یعنی ضمن تصویرحفظ می‌شود؛ ولی عکس آن درست نیست، یعنی هرویژگی تصویری، ممکن است ویژگی مجسم شکل نباشد.

مثلاً، اگر نسبت مضاعف چهار نقطهٔ یك خط راست برابر ۲ باشد، ضمن تصویر هم، این ویژگی باقی می‌ماند. در واقع، چهار نقطهٔ مفروض. ضمن تصویر، به‌چهارنقطهٔ دیگرباهمان نسبت مضاعف تبدیل می‌شود (ابتدای همین فصل را ببینید). بنابراین، این، یك ویژگی تصویری است، در حالی که از ویژگی‌های مجسم شکل نیست، زیرا مقدار نسبت مضاعف را تنها با اندازه‌گیری می‌توان به‌دست آورد (مقایسهٔ دوپاره خط).

برعکس، اگر مثلاً دو دسته نیم‌خط $abcd$ و $a'b'c'd'$، دارای یك نسبت مضاعف باشند، این ویژگی، یك‌ویژگی مجسم است، زیرا می‌دانیم که در این حالت، می‌توان دسته نیم‌خط سومی را به‌دست آورد که در موقعیت

پرسپکتیو نسبت به‌این دو دسته نیم‌خط قرار گرفته باشد.

برای این‌که بتوانیم حکم کنیم که دو دسته نیم‌خط دارای یك نسبت مضاعف هستند ، نیازی به تعیین نسبت مضاعف هر یك از دسته نیم خط‌ها نیست، بلکه کافی است کشف کنیم که می‌توان دسته‌ای را پیدا کرد که نسبت به‌دسته‌های مفروض، در موقعیت پرسپکتیو باشد.

b) برابری دو زاویه، معرف یك ویژگی متریك برای دو شکل است.

ولی قبلاً دیدیم که، ضلع‌های هریك از دو زاویهٔ برابر ، با نقطه‌های سیکلیك موهومی صفحه، منجر به‌یك نسبت مضاعف می‌شوند : در عین حال، این که دو نسبت مضاعف یك شکل برابرند، معرف ویژگی مجسم این شکل است. بنابراین، اگر دو نقطهٔ سیکلیك موهومی را هم به‌حساب آوریم، می‌توانیم ویژگی متریك فوق را، به عنوان یك ویژگی مجسم در نظر بگیریم.

مثال‌های دیگری را هم، می‌توان به‌سادگی پیدا کرد.

مثلاً، اگر نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB باشد، با یك ویژگی متریك سروکار داریم ولی نقطهٔ M، زوج توافقی نقطهٔ بی‌نهایت دور، نسبت به‌نقطه‌های A و B است. بنابراین، اگر نقطهٔ بی‌نهایت دور مفروض باشد، آن‌وقت نسبت مذکور، یك ویژگی مجسم را بیان می‌کند.

نیمساز هرزاویهٔ (a,b) برنیمساز زاویهٔ مجانب آن عمود است. بنابراین، هم نسبت به‌نیم‌خط‌های a و b و هم نسبت به‌نقطه‌های سیکلیك موهومی، زوج توافقی یکدیگرند؛ درنتیجه، اگر نقطه‌های سیکلیك موهومی مفروض باشند، با ویژگی‌های مجسم‌شکل معرفی می‌شوند.

۶. اکنون ثابت می‌کنیم که، به‌طور کلی، با به‌حساب آوردن خط‌راست بی‌نهایت دور و نقطه‌های سیکلیك موهومی صفحه، که در آن‌صورت آن را مطلق‌های صفحهٔ‌شکل گویند، هرویژگی متریك شکل می‌تواند به‌عنوان یك ویژگی مجسم آن، در نظر گرفته شود.

a) همهٔ ویژگی‌های متریك شکل، منجر به‌دو مفهوم می‌شوند: مفهوم برابری دو پاره‌خط و مفهوم برابری دو زاویه.

بنابراین، برای این که حکم بالا را ثابت کنیم، کافی است بتوانیم

برابری دو پاره‌خط را به‌عنوان یك‌ویژگی مجسم نشان دهیم، زیرا قبلا ثابت کردیم که، به‌شرط مفروض بودن مطلق‌های صفحه، برابری دو زاویه، یك ویژگی مجسم می‌شود.

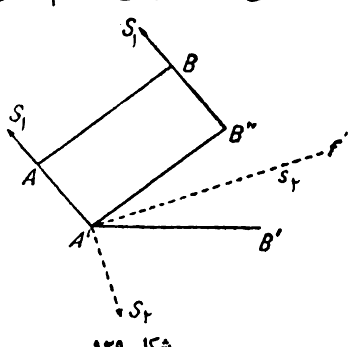
b) اگر دو پاره‌خط AB و $A'B'$ برابر باشند (شکل ۱۲۹)، می‌توان پاره‌خط AB را برپاره‌خط دوم منطبق کرد، به‌شرطی‌که ابتدا پاره‌خط AB را به‌موازات خودش انتقال دهیم و، سپس، قرینهٔ پاره‌خطی را که از این‌راه به‌دست می‌آید نسبت به‌نیمساز f پیدا کنیم (شکل ۱۲۹).

ولی انتقال موازی، حالت خاصی ازهمسانی (تناظر یك‌به‌یك) است. در ضمن، محور s_1 همسانی، خط راست بی‌نهایت دور صفحه و مرکز S_1 آن، نقطهٔ بی‌نهایت دور خط راست AA' است (§ ۲۸ را ببینید).

قرینهٔ نسبت به‌یك خط راست هم، حالت خاصی از همسانی است. در ضمن، محور s_2 همسانی برنیمساز f، ومرکز S_2، برنقطهٔ بی‌نهایت دورخط راست g ــ عمود برنیمساز ــ قرار دارد.

اکنون اگر مطلق‌های صفحه را در اختیار داشته باشیم، s_1 و S_1 را در اختیار داریم؛ s_2 و S_2 را هم می‌توانیم بدون اندازه‌گیری، و با ساختن خط‌های راست f و g، پیدا کنیم: خط‌های راست f و g، از یك طرف نسبت به‌خط‌های راست $A'B'$ و $A'B''$ و از طرف دیگر نسبت به‌نقطه‌های سیکلیك موهومی، زوج توافقی یکدیگرند.

به‌این ترتیب، اگر مطلق‌های صفحه را هم در اختیار داشته باشیم، برابری دو پاره‌خط را می‌توان ویژگی مجسم شکل به‌حساب آورد.



شکل ۱۲۹

۷. بازهم چندمثال، برای نشان‌دادن ویژگی‌متریك به‌عنوان یك‌ویژگی مجسم، می‌آوریم.

a) اگر دوخط راست برهم عمود باشند، می‌توان این ویژگی متریك را به‌صورت یك ویژگی مجسم بیان‌کرد: دو خط راست عمود برهم، نسبت به‌نقطه‌های سیکلیك موهومی، زوج توافقی یکدیگرند.

b) اگریك چهارضلعی‌مفروض، متوازی‌الاضلاع باشد، بادرنظرگرفتن خط راست بی‌نهایت، می‌توان گفت: ضلع‌های مقابل، یکدیگر را روی خط راست بی‌نهایت دور قطع می‌کنند؛ و این، یك ویژگی مجسم است.

c) مربع‌بودن یك‌شکل را می‌توان، به‌کمك مطلق‌های صفحه، به‌عنوان یك ویژگی مجسم بیان‌کرد: ضلع‌هـای مقابل، یکدیگر را روی خط راست بی‌نهایت دور، در نقطه‌هایی قطع می‌کنند کـه، نسبت به‌نقطه‌های سیکلیك موهومی، زوج توافقی یکدیگرند.

d) یك‌مثلث وقتی متساوی‌الاضلاع است که هردوضلع‌آن، بانقطه‌های سیکلیك موهومی، نسبت مضاعف ثابتی بسازد.

e) مجموع زاویه‌های یك مثلث، برابر است با ۱۸۰ درجه، چگونه می‌توان این حکم را، به‌عنوان یك ویژگی مجسم مثلث بیان کرد؟

f) زاویه‌ای از یك شکل برابر ۶۰ درجه است. چگونه می‌توان آن را به‌صورت مجسم بیان‌کرد؟

§ ۲۹. رده‌بندی مساله‌های ساختمانی هندسه

مسأله‌های ساختمانی هندسه را می‌توان از دیدگاه‌های مختلف مورد بررسی قرار داد و، طبق آن، به‌رده‌های مختلف تقسیم‌کرد.

a) این مسأله‌ها را می‌توان، با توجه به‌آن‌چـه گفته‌ایم، به‌دو بخش مسأله‌های ساختمانی مجسم و مسأله‌های ساختمانی متریك تقسیم‌کرد.

هرمسألهٔ ترکیبی در هندسه، کـه ساختن شکلی را از ما می‌خواهـد، دارای ویژگی‌های مفروضی است.

اگر همهٔ این ویژگی‌هـا مجسم باشند، آن‌وقت خود مسأله هـم، یك

مسألهٔ ساختمانی مجسم است. ولی اگر حتی یکی از ویژگی‌های مفروض، خصلت متریك داشته باشد، آن را مسالهٔ ساختمانی متریك گویند.

اگر با یك مسالهٔ مجسم سروکار داشته باشیم و تمام عنصرهای معلوم و مجهول آن را، از مرکزی، برصفحهٔ دوم تصویر کنیم، بیان شفاهی آن تغییر نمی‌کند، یعنی اگر عنصرهای معلوم را تصویر کنیم، آن‌وقت برای ساختن تصویر عنصرهای مجهول روی صفحهٔ دوم، به‌همان عمل‌هایی نیاز داریم که، برای ساختن مجهول‌ها در صفحهٔ اول لازم بود.

بنابراین، همیشه می‌توان مساله‌های مجسم را به‌کمك تصویرکردن و برخورد خطهای راست، مقطع‌های مخروطی و غیر آن، حل کرد.

برای حل مسأله‌های متریك، علاوه بررسم خطهای راست، بـه‌مقایسه و انتقال پاره خطها و زاویه‌ها و به رسم دایره‌ها و منحنی‌های عالی‌تـر نیازمندیم.

می‌دانیم که، اگر مطلق‌های صفحه را به‌شکل اضافه‌کنیم، هـرویژگی متریك شکل را می‌توان به‌عنوان ویژگی مجسم آن در نظر گرفت. بنابراین می‌توان گفت که: هرمسألهٔ متریك رامی‌توان، با اضافه‌کردن مطلق‌های صفحه، به‌یك مسألهٔ مجسم تبدیل کرد.

مسأله‌ای را تصویری می‌نامیم که، با تصویرکردن، بیان شفاهـی آن تغییر نکند. مثلا مسأله زیر یك مسألهٔ تصویری است: با در دست داشتن سه نیم‌خط از یك دسته، نیم‌خط چهارم را طوری پیدا کنید که با سه نیم خط اول، نسبت مضاعفی برابر ۲ تشکیل دهد؛ ولی این مسأله، یك مسالهٔ مجسم نیست، زیرا در آن، صحبت از اندازه است.

b) باحل مسأله‌های ساختمانی‌هندسه، به‌کمك محاسبه، به‌نظام دیگری برای رده‌بندی آن‌ها می‌رسیم.

در این حالت، رده‌بندی مسأله‌ها، به‌کمك نوع عمل‌های لازم بـرای حل و درجهٔ معادله‌ای که جواب را می‌دهد، انجام می‌گیرد.

قبل از همه، مساله‌ها را می‌توان به مساله‌هـای جبری و مساله‌هـای غیر جبری تقسیم کرد، بسته به‌این‌که راه حل آن‌ها، منجر به‌معادله‌های جبری می‌شود یا غیرجبری.

مثلاً، تربیع دایره، یك مسألهٔ ساختمانی غیرجبری است.

سپس، مسأله‌های جبری را می‌توان به‌مسأله‌های درجه اول،درجه دوم، درجه سوم و غیره تقسیم کرد، بسته به‌این که بزرگترین درجهٔ معادله‌هایی که ضمن حل به‌دست می‌آیند، چقدر باشد.

c) می‌توان رده بندی مسأله‌های ساختمانی هندسه را، برحسب نوع منحنی‌هایی که برای حل باید رسم شوند، یا برحسب نوع وسیله‌هایی که برای رسم منحنی‌ها (و در نتیجه برای حل مسأله) لازم‌اند، انجام داد. از همین دیدگاه است که می‌توان، مثلاً از مسأله‌هایی صحبت کرد که تنها با رسم خطهای راست، یا تنها بارسم دایره‌ها، قابل حل‌اند. همچنین، می‌توان مسأله‌هایی را مورد مطالعه قرار داد که، مثلاً، به‌کمك رسم خطهای راست، دایره‌ها ویك کنکوئید قابل حل‌اند. می‌توان ازهندسهٔ خطهای راست، هندسهٔ پرگار، هندسهٔ بیضی‌نگار وغیره صحبت کرد.

d) هرمسالهٔ هندسی راکه، به‌طورکلی، دارای جواب باشد، می‌توان با رسم حل کرد، ولی نه به‌کمك هروسیلهٔ دلخواه.

مثلاً، تثلیث زاویه (تقسیم زاویه به سه بخش برابر) را نمی‌توان، به‌کمك پرگار وخط کش، بادقت حل کرد، ولی همان‌طورکه به‌زودی‌خواهیم دید، به‌کمك وسیله‌های دیگری قابل حل است.

به‌این ترتیب، مسأله‌های مطلقاً غیرقابل‌حل وجودندارند وتنها می‌توان از مسأله‌هایی‌که به‌طور نسبی قابل حل نیستند صحبت کرد.

یونانی‌ها ، تنها استفادهٔ از پرگار و خط کش را برای رسم مجاز می‌دانستند ، به‌همین مناسبت، خیلی از مسأله‌ها برای آن‌ها، قابل حل نبود، مثلاً سه‌مسألهٔ مشهور تثلیث زاویه، تضعیف مکعب و تربیع دایره.

ولی همهٔ این مسأله‌ها را می‌توان با رسم حل کرد، حتی مسأله مربوط به‌تربیع دایره را، که منجر به‌ساختن پاره خطی برابر طول محیط دایرهٔ مفروض می‌شود. این مسأله را به‌کمك پرگار و خط کش وحتی بیضی نگار، نمی‌توان حل کرد، بلکه تنها به‌کمك وسیله‌هایی قابل حل است که می‌توانند منحنی‌های غیر جبری را رسم کنند، همچون «انته‌گراف» آبدانك ـ آباکانوویچ.

§ ۳۰. مساله‌های مجسم درجهٔ اول و درجهٔ دوم

A) مساله‌های مجسم درجهٔ اول

۱) این مسأله‌هـا، ضمن تصویرکردن، بیان شفاهـی خـود را تغییر نمی‌دهند، به‌اندازه‌گیری پاره‌خطها و زاویه‌ها نیازی ندارند و، ضمن حل محاسبه‌ای، منجر به‌معادله‌های درجهٔ اول می‌شوند.

براساس تصور اخیر، این‌مسأله‌ها، درهرحال دارای یك‌جواب‌هستند. حل آن‌ها، تنها به عمل تصویرکردن و برخورد نیاز دارد. به‌همین مناسبت، تنها بارسم‌خطهای راست قابل‌حل‌اند، زیرا استفادهٔ ازمقطع‌های مخروطی، در هرحال، منجر به‌دو جواب می‌شود.

برعکس، می‌توان ثابت کردکه هرمسألهٔ ساختمانی هندسه‌که تنها یك جواب داشته باشد و، در ضمن، مسأله‌ای مجسم باشد، یعنی بیان شفاهی‌خود را درتصویرکردن، تغییر ندهد ونیازمند اندازه‌گیری هم نباشد، تنها به‌کمك رسم‌خطهای راست، قابل حل است.

۲. هندسهٔ امروزی، بسیاری ازمساله‌های‌مجسم درجه‌اول رامی‌شناسد. مثلاً پیداکردن نقطهٔ چهارم ازچهار نقطهٔ توافقی، وقتی‌که سه‌نقطهٔ آن‌معلوم باشد؛ پیداکردن دو رشتهٔ تصویری از نقطه‌ها یا دستهٔ نیم‌خطهائی کـه سه زوج ازعنصرهای متناظرداده شده باشد؛ ساختن دستگاه‌های‌مسطح تصویری، وقتی که چهار زوج از عنصرهای متناظر مفـروض باشـد؛ تعیین نقطهٔ دوم برخورد خط راستی‌که از یك نقطهٔ مقطع مخروطی‌گذشته باشد، بااین مقطع به‌شرطـی پنج عنصر آن معلوم باشد؛ تعیین نقطهٔ چهارم برخـورد دو مقطع مخروطی، وقتی‌که سه نقطهٔ برخورد آن‌ها معلوم باشد.

همهٔ این مسأله‌های مجسم، یك جـواب دارند و، بنابراین، می‌تـوان آن‌ها را تنها با رسم‌خطهای راست حل‌کرد.

باید یادآوری کردکه، هرمسألهٔ تصویری راکه تنها یك جواب داشته باشد، نمی‌توان، منحصراً با رسم خطهای راست حل‌کرد.

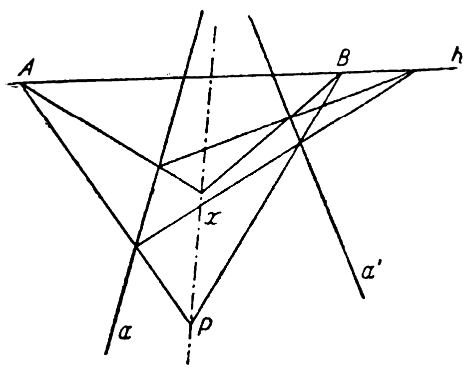
مثلاً، فرض کنید سه نقطه از یك رشته مفروض باشد و بخواهیم نقطهٔ چهارم این رشته را طوری پیداکنیم‌که، نسبت مضاعف مربوط به‌چهار نقطه

(نقطهٔ مجهول و نقطه‌های مفروض) برابر ۲ شود. این مسأله تصویری است، ولی مجسم نیست و اگر مطلق‌های صفحه مفروض نباشد، نمی‌توان آن‌را تنها با رسم خط‌های راست حل کرد.

۳. ما به بحث تفصیلی دربارهٔ حل مسأله‌های مجسم درجه اول نمی‌پردازیم، زیرا این مسأله‌ها، به هندسهٔ تصویری مربوط می‌شوند. تنها برخی از این مسأله‌ها را مطرح و حل می‌کنیم. در این مسأله‌ها، راه‌حل متکی برقضیهٔ مربوط به‌مثلث‌های در موقعیت پرسپکتیو است.

۱۹۴. دوخط راست a و a' ونقطهٔ P مفروض‌اند. می‌خواهیم خط راست x را طوری رسم کنیم که از نقطهٔ P و نقطهٔ غیرقابل دسترس برخورد a و a' بگذرد.

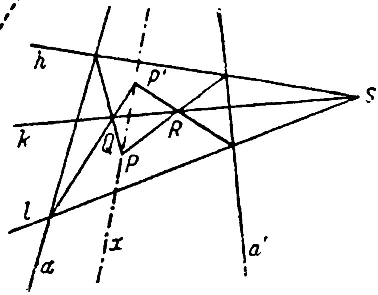
حل طبق شکل ۱۳۰ یا شکل ۱۳۱ انجام می‌گیرد. روی شکل اول، خط راست h و نقطه‌های A و B دلخواهند، وروی شکل دوم، خط‌های‌راست h، k، l و نقطهٔ S به‌دلخواه انتخاب شده‌اند.



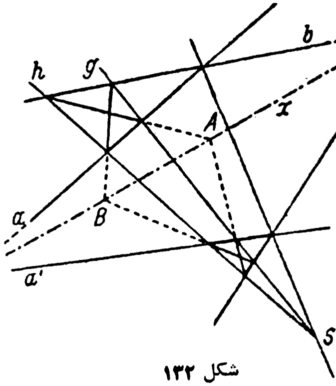
شکل ۱۳۰

۱۹۵. دو زوج خط‌های راست a، a' و b، b' مفروض‌اند، درضمن نقطه‌های برخورد $a\times a'$ و $b\times b'$ در بیرون صفحهٔ شکل قرار دارند (شکل ۱۳۲). خط راستی رسم کنید که از این‌دو نقطه عبور کند.

برای حل این مسأله، نقطهٔ دلخواه S را روی قطر دوم چهارضلعی $aa'bb'$ انتخاب و خط‌های راست h و g را از آن عبور دهید و، سپس،



شکل ۱۳۱

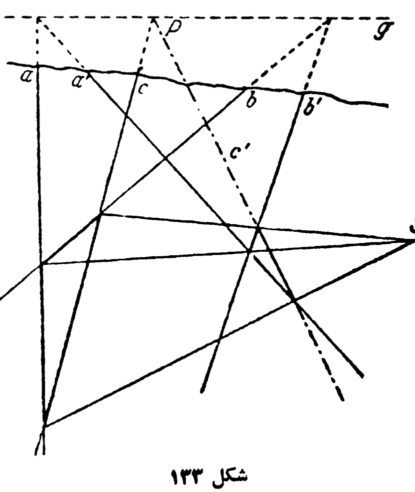


شکل ۱۳۲

مثلث‌هایی را که در موقعیت پرسپکتیو قرار دارند در نظر بگیرید.

نقطه‌های A و B روی خط‌راست مجهول واقع‌اند.

۱۹۶. خط راست g، که در بیرون صفحهٔ‌شکل واقع است، از نقطه‌های برخورد دو زوج خط‌های راست a، a' و b ، b' می‌گذرد (شکل ۱۳۳)؛ به‌جز این، خط راست c داده شده است که خط راست g را در نقطهٔ P، واقع در بیرون صفحهٔ شکل ، قطع می‌کند. می‌خواهیم خط‌راست c' را



شکل ۱۳۳

طوری رسم کنیم که از نقطهٔ P عبور کند.

نقطه‌های برخورد $a \times b$ و $a' \times b'$ را به‌هم وصل کنید (شکل ۱۳۳)، سپس روی این خط راست، نقطهٔ دلخواه S را انتخاب و خط راست c' را به‌عنوان ضلع مثلثی که در پرسپکتیو نسبت به‌مثلث abc و نقطهٔ S قرار دارد، پیدا کنید.

B) مساله‌های مجسم درجهٔ دوم

۱. در این مسأله‌هـا باید بستگی‌های معینی از وضع و موقعیت شکل مجهول را پیدا کرد و، اگر برای حل آن از محاسبه کمك گرفته شود، منجر به‌معادله‌ای درجهٔ دوم شود؛ بیان شفاهی این مسأله‌هـا، ضمن تصویر کردن، تغییر نمی‌کند و، برای حل آن‌ها، نیازی به‌اندازه‌گیری پاره‌خطها وزاویه‌ها پیدا نمی‌شود.

از آن‌جا که هرمسألهٔ درجه دوم دوجـواب دارد: هرمسألهٔ درجه دوم، به‌شرطی که مربوط به‌تعداد بیشتری از معادله‌های درجه دوم نباشد، تنها دو جواب دارد که درضمن ممکن‌است‌این‌دوجواب برهم‌منطبق یاموهومی باشند. به‌همین مناسبت معمولاً می‌گویند که: مساله‌های هندسی درجه دوم یا دو جواب دارند، یا یك جواب و یـا اصلا جوابی نـدارند.

به‌عنوان‌مثال، نمونه‌هایی‌ازمسأله‌های‌درجه‌دوم هندسی‌را ذکرمی‌کنیم:

تعیین نقطه‌های برخورد خط راست با یك‌مقطع مخروطی که به‌وسیلهٔ پنج نقطهٔ آن داده شده است؛ رسم ممـاس از نقطهٔ مفروض بـریك مقطع مخروطی که با پنج نقطهٔ خود مشخص شده است؛ پیدا کردن بقیهٔ نقطه‌هـای برخورد دو مقطع مخروطی، وقتی‌که دو نقطهٔ برخورد آن‌هـا معلوم است؛ تعیین دونقطهٔ متناظر از دورشتهٔ تصویری، وقتی‌که روی یك‌خط راست‌باشند و سه زوج از نقطه‌های متناظر آن‌ها مفروض باشد؛ پیدا کردن دونقطه ازیك گستره، وقتی‌که دوزوج از نقطه‌های آن معلوم باشد، یا (به‌زبان دیگر) تعیین دونقطه از یك خط راست، به‌نحوی کـه نسبت به‌دو زوج نقطه از همین‌خط راست، زوج توافقی یکدیگر باشند وغیره.

۲. هرمسألهٔ مجسم درجه دوم را می‌توان به‌مسألهٔ زیر منجر کـرد (که

ما آن‌را ثابت خواهیم کرد):

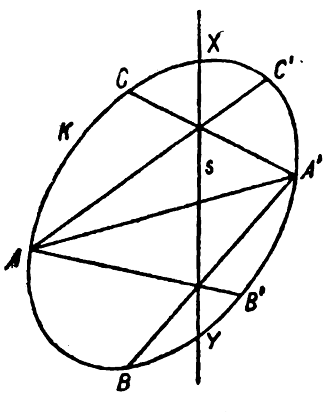
از بین دورشته نقطه‌هایی که بریك مقطع مخروطی K قرار دارند (شکل ۱۳۴) و بستگی تصویری با هم دارند ، سه‌زوج نقطهٔ متناظر AA'، BB' و CC' داده شده است. می‌خواهیم عنصرهای X و Y را دراین بستگی تصویری طوری پیداکنیم که هرکدام ازآن‌ها متناظر با خودش باشد.

برای به‌دست‌آوردن این نقطه‌ها، دو رشته نقطه‌هایی راکه روی K قرار دارند از A و A'، تصویر می‌کنیم و از این راه دو دستهٔ تصویری می‌سازیم‌که در موقعیت پرسپکتیو نسبت به‌یکدیگر قرار دارند، زیرا نیم‌خط AA' در دو دسته مشترك و متناظر با خودش است. بنابراین، نیم‌خط‌های متناظر این دو دسته روی خط‌راستی مثل s یکدیگر را قطع می‌کنندکه از آن می‌توان برای برقراری هردو رشته ازنقطه‌ها استفاده‌کرد.

به‌سادگی دیده می‌شود‌که نقطه‌های برخورد s با K، همان نقطه‌های مجهول X و Yاند.

تعیین عنصرهای مضاعف دو رشتهٔ تصویری از نقطه‌هایی‌که بریك‌خط راست واقع‌اند و، بنابراین، تعیین نقطه‌های برخورد خط راست بایك مقطع مخروطی (که با پنج نقطهٔ خود مشخص شده است) ، به‌حل‌همین مسألهٔ بالا منجر می‌شود.

مسأله‌های درجه دومی را هم‌که قبلاً یاد کردیم، می‌توان به‌همین



شکل ۱۳۴

مسأله منجر کرد.

۳. هرمسالهٔ مجسم درجه دوم را می‌توان تنها به‌کمك رسم‌خط‌های راست حل‌کرد، به شرطی‌که مقطع مخروطی ثابتی درروی صفحهٔ شکل داده شده باشد.[۱۰۶]

برای حل هرمسألهٔ درجه دوم مجسم، با رسم خطهای راست می‌توان مقطع‌های مخروطی را معین کرد، نقطه‌های برخورد خط‌راست را با خط راست، و هم با مقطع مخروطی به‌دست آورد. و برای رسیدن به‌هدف‌ها، باید از عمل‌های تصویر کردن و پیدا کردن نقطه‌های برخورد استفاده کرد.

ولی اگر بخواهیم نقطه‌های برخورد خط راست را با یك مقطع مخروطی که به‌وسیلهٔ پنج‌عنصر آن داده شده است، پیدا کنیم، همیشه می‌توان به‌همان مسألهٔ اساسی رسید (۲ را ببینید) و با استفاده از مقطع مخروطی K، آن‌را تنها با رسم‌خطهای راست حل کرد.

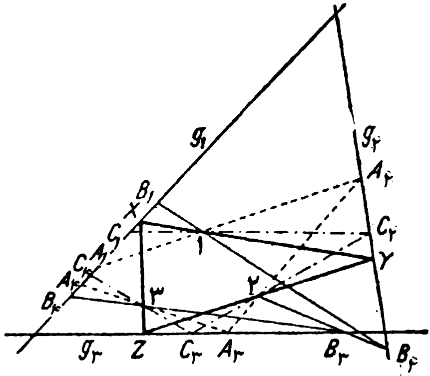
به‌این ترتیب، برای حل هرمسألهٔ درجه دوم مجسم، می‌توان تنها با رسم خطهای راست به‌نتیجه رسید، به شرطی‌که یك مقطع مخروطی، ومثلاً یك دایره، در صفحهٔ شکل داده شده باشد، درضمن، لزومی ندارد که ازجای مرکز این دایره اطلاع داشته باشیم (با بحث ۱۳§ مقایسه‌کنید).

۴. بنابراین، هرمسالهٔ درجه دوم مجسم می‌تواند ، سرانجام، به‌تعیین عنصرهای مضاعف دورشته نقطه‌های تصویری متناظر با هم، منجر شود. از این‌جا، یك‌روش‌کلی جالب، برای حل این‌گونه مساله‌ها پیدا می‌شود که آن‌را «روش آزمایشی» می‌نامند. این‌روش‌را، به‌کمك یك‌مثال، روشن می‌کنیم.

سه‌خط‌راست g_1، g_2، g_3 وسه‌نقطهٔ ۱، ۲، ۳ مفروض‌اند (شکل ۱۳۵). می‌خواهیم مثلثی رسم کنیم که سه‌رأس آن به ترتیب برخطهای راست g_1، g_2 و g_3 واقع‌باشند وسه‌ضلع آن به‌ترتیب از نقطه‌های ۱، ۲ و ۳ بگذرند.

نقطهٔ A_1 را روی g_1 به‌دلخواه انتخاب می‌کنیم. تصویر A_1 را از نقطهٔ ۱ بر g_2 پیدا می‌کنیم و آن‌را A_2 می‌نامیم. سپس، تصویر A_2 را از ۲ بر g_3 (نقطهٔ A_3) وتصویر A_3 را از ۳ بر g_1 (نقطهٔ A_4) به‌دست‌می‌آوریم.

وقتی‌که A_1 روی خط راست g_1 حرکت‌کند، نقطهٔ A_2 از یك‌رشته نقطه‌های‌واقع بر g_2 می‌گذرد که نسبت به‌رشته‌های واقع بر g_1، در موقعیت



شکل ۱۳۵

پرسپکتیو قرار دارند؛ A_3 از رشته نقطه‌هایی واقع بر g_3 عبور می‌کند که نسبت به g_2 در موقعیت پرسپکتیوند؛ بالاخره A_4 از رشته نقطه‌هایی واقع بر g_1 می‌گذرد که نسبت به g_3 در موقعیت پرسپکتیو قرار دارند.

بنابراین رشته نقطه‌هایی که بر g_1 به‌وسیلهٔ A_1 و A_4 پدید می‌آیند، در بستگی تصویری قرار دارند؛ در نتیجه، نقطهٔ مجهول X، نقطهٔ مضاعف این بستگی تصویری است، زیرا اگر A_4 بر A_1 منطبق شود، جواب مسأله را به‌دست خواهیم آورد.

مسأله‌هایی برای تمرین:

۱۹۷. دو مثلث ABC و DEF مفروض‌اند. مثلث XYZ را طوری رسم کنید که محاط در مثلث ABC و محیط برمثلث DEF باشد.

۱۹۸. سه‌نقطه و یک مقطع مخروطی مفروض است. می‌خواهیم مثلثی در مقطع مخروطی محاط کنیم که هریک از سه ضلع آن از یکی از نقطه‌های مفروض بگذرد.

۱۹۹. سه‌خط راست و یک مقطع مخروطی مفروض‌اند. می‌خواهیم مثلثی محیط برمقطع مخروطی مفروض رسم کنیم، به‌نحوی که سه‌رأس آن برسه خط راست مفروض واقع باشند.

یادداشت. درست است که با در اختیار داشتن یک مقطع مخروطی

برصفحهٔ شکل، می‌توانیم هرمسألهٔ درجه دوم مجسم را، تنها با رسم‌خطهای راست حل کنیم، ولی‌حتی یکی ازمسأله‌های متریك‌را هم نمی‌توان حل کرد.
مثلا با این وسیله‌ها، نمی‌توان پـاره‌خطی را نصف کرد، خط موازی رسم کرد ویا برخط مفروض، عمودی فرودآورد.

§ ۳۱. مسأله‌های متریك درجهٔ اول ودرجهٔ دوم

۱. این مسأله‌هـای ساختمانی هندسه، آن‌هـایی هستندکه، ضمن حل محاسبه‌ای آن‌ها، به‌معادله‌ای از درجهٔ اول یا درجهٔ دوم می‌رسیم و،درضمن، موضوع اندازه‌گیری هم درآن‌ها مطرح می‌شود.
مثلا ، این مسأله‌ها، مسأله‌هـای متریك خطی هستند : تقسیم پـاره‌خط به‌دوبخش بـرابـر؛ رسم خط راستی موازی بـا خطراست مفروض؛ رسم عمود وغیره.
این مسأله‌هـا ، تنها یك جواب دارند ، زیرا به‌یك معادلهٔ درجهٔ اول منجر می‌شوند. با وجود این، نمی‌توان آن‌ها را تنها با رسم خطهای‌راست حل‌کرد (البته، به‌شرطی‌که مطلق‌های صفحه، مفروض نباشند).
مسأله‌های متریك درجه‌دوم، مثلا ازاین‌قبیل‌اند: تقسیم زاویه به‌دوبخش برابر، انتقال پاره‌خط؛ تعیین نقطه‌هـای برخورد خطراست بـا دایره‌ای‌که به‌وسیلهٔ مرکز وشعاع آن داده شده است وغیره.
همهٔ این مسأله‌ها دوجواب دارند (که ممکن است برهم منطبق باشند ویا موهومی از آب درآیند)، زیرا منجر به‌معـادله‌ای درجه دوم می‌شوند؛ این مسأله‌ها را، حتی بـا مفروض‌بودن یك مقطع مخروطی در صفحهٔ شکل، نمی‌توان تنها با رسم‌خطهای راست حل‌کرد (به‌شرطی‌که مطلق‌های صفحه، مفروض نباشند).
۲. ولی بنابر §۲۸، هرویژگی متریك‌را می‌توان به‌عنوان یك‌ویژگی مجسم در نظرگرفت، به‌شرطی‌که مطلق‌های صفحه‌را هم به‌شکل مربوط‌کنیم.
دوخط راست موازی، نقطهٔ بی‌نهایت دور ودو زوج خطهای راست موازی (متوازی‌الاضلاع)، خط راست بی‌نهایت دور را معین می‌کنند.

اگر یك مربع در صفحهٔ شکل مفروض باشد، به‌کمك آن می‌توان، نه‌تنها خط راست بی‌نهایت دور، بلکه نقطه‌های سیکلیك موهومی‌را هم‌معین کرد. این نقطه‌ها به‌وسیلهٔ هردوضلع مجاور مربع وهم به‌وسیلهٔ قطرهای آن، به‌صورت توافقی تقسیم می‌شوند و، بنابراین،کاملا معین‌اند.

به‌این ترتیب، مربعی‌که روی صفحهٔ شکل رسم شده‌باشد، خط‌راست بی‌نهایت دور ونقطه‌های سیکلیك موهومی و، بنابراین، مطلق‌های صفحه را معین می‌کند. به این دلیل، اگر مربعی روی صفحهٔ شکل مفروض باشد، هرمسألهٔ متریك درجهٔ اول را می‌توان همچون یك مسألهٔ خطی مجسم درنظر گرفت و آن‌را، تنها با رسم خطهای راست، حل کرد (§۱۲).

اگر دایره‌ای همراه با مرکز آن روی صفحهٔ شکل داده شده باشد، مثل این است که مطلق‌های صفحه مفروض باشند: خط‌راست بی‌نهایت دور، قطبی مرکز نسبت به دایره است، و نقطه‌های سیکلیك موهومی، نقطه‌های برخورد دایره با خط راست بی‌نهایت دورند.

وجود یك دایرهٔ بدون مرکز، بنابر §۳۰، برای هر مسألهٔ درجه دوم مجسم، به‌کمك رسم فقط خطهای راست،کافی است. اگر به‌جز دایره، مرکز آن هم داده شده باشد، هرمسألهٔ‌متریك درجه دوم را هم می‌توان همچون یك مسألهٔ مجسم در نظرگرفت و،بنابراین، می‌توان تنها به‌کمك خطهای‌راست، آن را حل کرد. ما در فصل‌دوم هم، به‌همین نتیجه رسیده بودیم.

اگر یك مقطع مخروطی و یك مربع در صفحهٔ شکل مفروض باشد، آن‌وقت می‌توان هرمسألهٔ درجه دوم مجسم یا متریك را، تنها با رسم‌خطهای راست، حل کرد؛ اگر یك‌مقطع مخروطی، همراه با مرکز ویکی ازکانون‌های آن، درصفحهٔ شکل داده شده‌باشد، بازهم همین‌نتیجه به‌دست می‌آید(§۱۳).

مسأله‌هایی برای تمرین:

۲۰۰. نقطهٔ P و دو خط راست موازی a و a' مفروض‌اند. تنها با رسم خطهای راست، خط‌راستی از نقطهٔ P بگذرانید که با a و a' موازی باشد (با شکل‌های ۱۳۰ و ۱۳۱ مقایسه کنید). (نقطهٔ بی‌نهایت دور را، می‌توان همچون نقطه‌ای که در بیرون صفحهٔ شکل است، درنظر گرفت.)

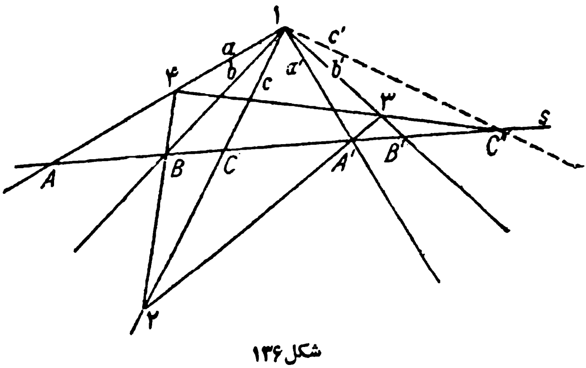
۲۵۱. دوزوج خطهای موازی aa' و bb'، یعنی یك متوازی‌الاضلاع، داده شده است؛ به‌جز آن، خط راست c و نقطهٔ P هم مفروض‌اند. تنها با رسم خطهای راست، خط‌راست c' را طوری رسم کنید که از P بگذرد و با c موازی باشد (با شکل ۱۳۳ مقـایسه کنید). (خط‌راست بی‌نهایت دور را به‌عنوان خط‌راستی که در بیرون صفحهٔ شکل قرار دارد، در نظر بگیرید.)

۲۵۲. بنابر قضیهٔ معروف هندسهٔ تصویری، سه‌زوج ضلع‌های روبه‌رواز چهارضلعی کامل (۴ ۳ ۲ ۱)، هرخط راست s را درسه‌زوج نقطهٔ A و A'، B و B'، C و C' از یك گستره قطع می‌کنند (شکل ۱۳۶). از طـرف دیگر می‌دانیم:

اگر زوج نیم‌خطهای عمود بـرهم a و a'، b و b'، c و c'،... از یك‌دسته متناظر یکدیگر باشند، نیم‌خطهای دسته، تشکیل یك گستره می‌دهند.

ولی گستره را می‌توان بادو زوج از عنصرهای آن معین کرد. بنابراین، اگر نیم‌خط a بر a' و نیم‌خط b بر b' عمود باشـد، آن‌وقت نیم‌خط c'، عمود بـر c را، می‌توان به‌صورت خطی، مطـابق شکل ۱۳۶، حل کرد. (خط‌راست دلخواه s و نقطهٔ ۲ را بر c انتخاب کنید، سپس نقطه‌های ۳ و ۴ را بسازید. (با ۲۷§ مقایسه کنید).

۲۵۳. یك‌مربع، سه‌نقطهٔ A، B، C و خط‌راست g که از A گذشته است، مفروض‌اند. تنهـا بـا رسم خطهای راست، نقطهٔ دیگر برخورد خط راست g را با دایره‌ای که از A، B و C گذشته است، پیدا کنید.



شکل ۱۳۶

§ ۳۲. حل نموداری معادلهٔ درجه دوم

اگر از محاسبه استفاده کنیم، هرمسألهٔ هندسی درجهٔ دوم، منجر به‌حل یك معادلهٔ درجهٔ دوم می‌شودکه ضریب‌های آن از روی مقدارهای معلوم و به‌کمك عمل‌های گویا و گرفتن ریشهٔ دوم به‌دست می‌آید.

اگر ضمن حل محاسبه‌ای یك‌مسألهٔ هندسی، به‌معادلهٔ درجه دوم

$$x^{۲}+mx+n=۰ \qquad (۱)$$

برسیم، آن‌وقت یا ضریب m یك‌پاره‌خط مفروض و n، مربع یك پاره‌خط است، ویا m و n به‌صورت عدد داده شده‌اند.(وقتی پاره‌خطی را به‌عنوان واحد درنظر بگیریم. x را می‌توان به‌صورت یك پاره‌خط و با رسم عبارت زیر پیداکرد:

$$x=-\frac{m}{۲}\pm\sqrt{\frac{m^{۲}}{۴}-n} \qquad (۲)$$

اگر به‌عنوان وسیلهٔ‌رسم برای حل‌معادلهٔ (۱)، تنها پرگار یاخط‌کشی بادولبهٔ موازی (دوخط راست موازی بافاصلهٔ ثابت) دراختیار داشته‌باشیم، آن وقت می‌توانیم‌جواب x را، با همین وسیله‌ها و با قاعده‌هایی که می‌دانیم، بسازیم.

ما به‌بررسی این‌دو حالت نمی‌پردازیم، در عوض، حل معادلهٔ درجهٔ دوم را به کمك دایرهٔ شتینر و به کمك زاویهٔ قائمه، به‌تفصیل مورد بحث قرار می‌دهیم.

۱. حل معادلهٔ درجه دوم، تنها با رسم خط‌های راست و به کمك یك دایرهٔ مفروض.

فرض می‌کنیم، معادلهٔ زیر، برای حل داده شده باشد:

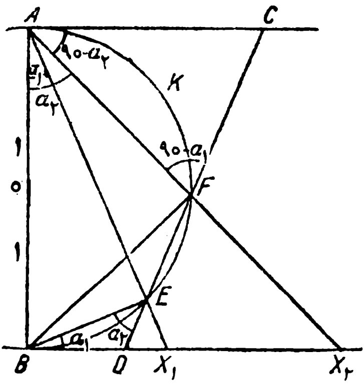
$$x^{۲}-px+q=۰ \qquad (۳)$$

که‌در آن، p و q، عددهایی گویا هستند. در دایرهٔ مفروض کمکی K به‌شعاع ۱

(شکل ۱۳۷) قطــر AB را می‌کشیم و بردو انتهای آن مماس‌هایی بردایرهٔ K رسم می‌کنیم؛ روی این‌دو ممــاس جهت مثبت را به‌طور یکسان انتخاب و نقطه‌های C و D را روی آن‌ها طوری درنظر می‌گیریم که داشته باشیم:

$$\overline{AC}=\frac{۴}{p} \text{ و } \overline{BD}=\frac{q}{p}.$$

خط راست CD، محیط دایره را دردو نقطهٔ E و F قطع می‌کند که اگر آن‌ها را از نقطهٔ A تصویر کنیم، به‌دو نقطهٔ $X_۱$ و $X_۲$ می‌رسیم. ثابت می‌کنیم که $\overline{BX_۱}=x_۱$ و $\overline{BX_۲}=x_۲$، ریشه‌های مجهول معادلهٔ(۳) هستند.



شکل ۱۳۷

اثبات. $x_۱$ و $x_۲$ و، بنابراین، نقطه‌های $X_۱$ و $X_۲$ رامفروض می گیریم وپاره‌خطهای $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ را پیدا می‌کنیم داریم:

$$tg\,\alpha_۱=\frac{x_۱}{۲} \text{ و } tg\,\alpha_۲=\frac{x_۲}{۲}$$

در مثلث AFC داریم: $\hat{A}=۹۰^\circ-\alpha_۲$ و $\hat{F}=۹۰^\circ-\alpha_۱$، بنابراین

$$\overline{AC}=\frac{\overline{AF}\cos\alpha_۱}{\sin(\alpha_۱+\alpha_۲)}$$

و از مثلث AFB به‌دست می‌آید:

$$\overline{AF}=2\cos\alpha_2$$

بنا بر این

$$\overline{AC}=\frac{2\cos\alpha_1\cos\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}=\frac{2}{tg\alpha_1+tg\alpha_2}=\frac{4}{x_1+x_2}$$

به‌همین ترتیب، از مثلث DBE، با توجه به‌این که $\hat{B}=\alpha_1$ و $\hat{E}=\alpha_2$، نتیجه می‌شود:

$$\overline{BD}=\frac{\overline{BE}\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}=\frac{2\sin\alpha_1\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}=\frac{2tg\,\alpha_1\,tg\,\alpha_2}{tg\alpha_1+tg\alpha_2}=\frac{x_1x_2}{x_1+x_2}$$

ولی x_1 و x_2، ریشه‌های معادلهٔ $x^2-px+q=0$ هستند، بنابراین

$$x_1+x_2=p,\qquad x_1x_2=q$$

یعنی $\overline{AC}=\frac{4}{p}$ و $\overline{AD}=\frac{q}{p}$. حکم ثابت شد.

یادداشت. همان‌طور که می‌دانیم، به‌کمك دایرهٔ شتینر (فصل دوم) می‌توان، تنها با رسم خطهای راست، پاره‌خطها را در هم ضرب و برهم تقسیم کرد. بنا براین، اگر p و q عددهایی گویا باشند، می‌توان پاره‌خطهای $\frac{4}{p}$ و $\frac{q}{p}$ را، تنها با خطهای راست، رسم کرد.

ریشه‌های معادله، با پاره‌خطهای BX_1 و BX_2 معین می‌شوند. اگر بخواهیم مقدار عددی این‌ریشه‌هارا به‌دست‌آوریم، باید نسبت این‌پاره‌خطها را به‌شعاع دایره پیداکنیم.

برای این منظور، ابتدا باید دانست‌که شعاع دایره چندبار در BX_1 جا می‌گیرد، سپس شعاع دایـره را به‌ده قسمت برابر تقسیم و تعیین‌کرد که $\frac{1}{10}$ شعاع را چندبار می‌توان جاداد؛ درصورت لزوم، می‌توان به‌بخش‌های $\frac{1}{100}$ شعاع هم پرداخت.

۲. تعیین ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم به‌کمك زاویهٔ قائمه

فرض کنید، معادلهٔ زیر را برای حل داده باشند:

$$a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0 \qquad (4)$$

که در آن، a_1، a_2 و a_3 عددهایی درست و a_1 عددی مثبت است.

a) دوحالت درنظر می‌گیریم:

α) ضریب a_3 مثبت و، بنابراین، هم‌علامت a_1 است.

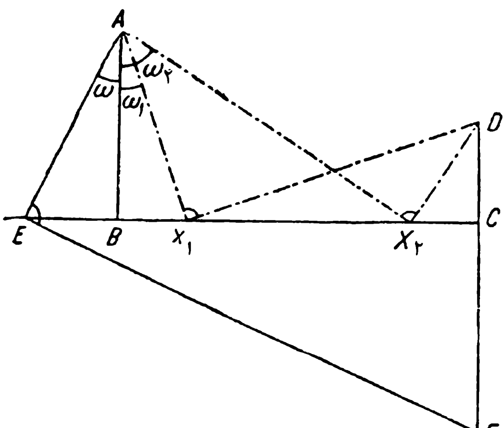
خط شکستهٔ قائم‌الزاویهٔ $ABCD$ را طوری رسم می‌کنیم که‌ضلع‌های آن، به ترتیب، متناسب با ضریب‌های a_1، a_2 و a_3 باشند (شکل ۱۳۸)؛ ضمناً پاره‌خط CD جهتی مخالف پاره‌خط AB دارد.

اکنون اگر خط‌راست AE را با زاویهٔ دلخواه ω، نسبت به AB و EF را عمود بر AE رسم وفرض کنیم $tg\,\omega = x$، داریم:

$$\overline{BE} = a_1 x, \quad \overline{CE} = a_1 x + a_2, \quad \overline{CF} = (a_1 x + a_2)x,$$

$$\overline{FD} = a_1 x^2 + a_2 x + a_3$$

اگر F بر D منطبق شود، آن‌وقت: $\overline{FD} = 0$؛ به‌نحوی که $tg\omega$ ریشهٔ معادله است.



شکل ۱۳۸

در شکل ۱۳۸، $tg\,\omega_1$ و $tg\,\omega_2$ (با علامت منفی) ریشه‌های معادله‌اند، زیرا خط‌های شکستهٔ قائم‌الزاویهٔ AX_1D و AX_2D به D ختم می‌شوند.

چنین خط شکسته‌ای را می‌توان به سادگی و به‌کمك زاویـهٔ قـائمه ساخت. زاویهٔ قائمه را روی شکل طوری قرار می‌دهیم که ضلع‌های آن از A و D بگذرد و رأس آن برخط راست BC (و درصورت لزوم، برامتداد آن) قرار گیرد. در این‌صورت، ریشه‌های معادله چنین است:

$$x_1=\frac{\overline{BX_1}}{\overline{AB}}\ ,\ \ x_2=\frac{\overline{BX_2}}{\overline{AB}}$$

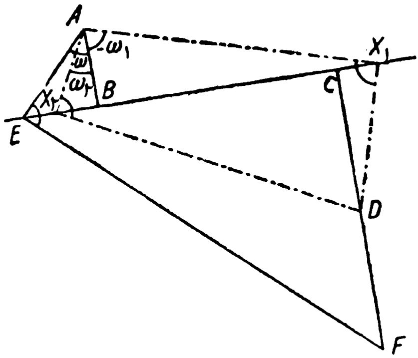
β) a_3، جملهٔ آزاد معـادله، منفی است، یعنی علامتی مخالف علامت a_1 دارد. در این حالت، خط شکسته را، با ضلع‌های a_1، a_2 و a_3، طوری می‌سازیم که a_1 و a_3 هم‌جهت باشند (شکل ۱۳۹).

اگر AF را با زاویهٔ ω نسبت به AB و FE را عمود بر AE رسم کنیم، بافرض $tg\omega=x$ به‌دست می‌آید:

$$\overline{BE}=a_1x,\quad \overline{CE}=a_1x+a_2,\quad \overline{FD}=a_1x^2+a_2x+a_3$$

(در آن، a_3 عددی منفی است).

بـرای حل معادله، بـاید خط شکسته را ساخت. برای این منظور،



شکل ۱۳۹

می‌توان زاویهٔ قائمه را برصفحهٔ شکل طوری قرار داد که ضلع‌های آن از A و D بگذرد و رأس آن برخط راست BC قرار گیرد.

b) دوحالت α) و β) را می‌توان با قاعدهٔ زیر، به‌صورت یك حالت درآورد.

خط شکسته‌ای رسم می‌کنیم که ضلع‌های آن برابر بـا ضریب‌هـای معادلهٔ مفروض باشد (بهتر آن است که پاره‌خطی را به‌عنوان واحد انتخاب کرده باشیم)؛ دو پاره‌خط اول برهم عمودند، ولی موضع آن‌ها را به‌دلخواه می‌توان انتخاب کرد؛ پاره‌خط سوم (که برپـاره‌خط دوم عمود است)، بسته به‌مثبت یا منفی‌بودن a_3، (a_1 را مثبت گرفته‌ایم)، در جهت یا خلاف جهت a_1 است.

وقتی که این خط شکسته آماده شد، باید به‌علامت مقدارهای موردنظر هم توجه کرد.

زاویهٔ ω را وقتی مثبت به‌حساب می‌آوریم که، اگـر ω برابر ۲۷۰ درجه بـاشد، به‌جهت مثبت پاره‌خط BC برسیم؛ در ضمن، این جهت مثبت، بسته به‌مثبت یا منفی‌بودن ضریب a_2، برجهت BC یا CB منطبق است.

یادداشت. اگر زاویهٔ قائمه را به‌عنوان تنها وسیلهٔ رسم درنظر بگیریم، می‌توانیم خط‌های راست موازی با هم و عمود برهم را رسم و پاره‌خط‌ها را درهم ضرب یا برهم تقسیم کنیم (§۲۴).

بنابراین، به‌کمك این‌وسیله، می‌توان خط‌شکستهٔ $ABCD$ را «معرف» سه‌جمله‌ای $a_1x^2+a_2x+a_3$ دانست، به‌شرطی که a_1، a_2 و a_3 عددهایی گویا باشند.

به‌این ترتیب، خط شکسته را (که چارچوب راه‌حل را به‌ما می‌دهد) می‌توان، تنها بـا استفاده از زاویهٔ قـائمه جست‌وجو کرد. ریشه‌های عددی معادله‌را هم می‌توان، تنها به‌کمك همین وسیله، به‌دست آورد.

فصل ششم

اثبات ناممکن‌ها

§۳۳. مقدمه

۱. در فصل‌های قبل، بارهادربارهٔ ناممکن بودن‌حل یك مسألهٔ‌ساختمانی، باوسیلهٔ مفروض، صحبت کرده‌ایم.

مثلاً یادآوری کردیم که، برای حل مسأله‌های درجه دوم ساختمانی به‌کمك یك دایره و خط‌کش یك لبه، باید علاوه برخود دایره، مرکز آن را هم دراختیار داشت و به‌خصوص، تنها به‌کمك رسم‌خطهای راست، نمی‌توان درحالت مفروض‌نبودن مرکز دایرهٔ شتینر، پاره‌خطها را نصف کرد و یا خط راستی موازی با خط راست دیگر به‌دست آورد.

یادآوری کردیم که، تنها با رسم خطهای راست، نمی‌توان مرکز مجهول دایره‌ای که در صفحه شکل رسم شده است، پیدا کرد.

بازهم، مثلاً، به‌یاد داریم که هرمسألهٔ هندسی درجه دوم رانمی‌توانیم به‌کمك رسم‌خطها و انتقال پاره‌خطهای راست، حل کنیم. مثلاً بااین‌روش، نمی‌توان عبارت $\sqrt{a^2-b^2}$ را، با مفروض بودن پاره خطهای a و b، ساخت.

۲. اثبات دقیق این حکم‌ها، باید انجام بگیرد، زیرا ذهن ما وقتی می‌تواند قانع شودکه یا راه‌حل کامل یك مسأله و اثبات دقیق یك قضیه را پیداکنیم و یا مبنای استدلالی محکمی برای عدم امکان رسیدن به‌این راه‌حل

و این اثبات در اختیار داشته باشیم.

§ ۳۴. ناممکن بودن تعیین مطلق‌های صفحه به‌کمك عمل‌های مجسم رسم

۱. وقتی که از عمل‌های مجسم رسم صحبت می‌کنیم، منظورمان این است که می‌توانیم خط‌های راست را رسم کنیم و برخورد آن‌ها را با هم یا با هرشکل مفروض دیگر، که می‌تواند منحنی هم باشد (مثل یك مقطع مخروطی)، به دست آوریم؛ در این عمل‌ها ، هیچ گونه اندازه‌گیری مجاز نیست.

در ضمن، فرض بر این است که شکل‌های مفروض، مطلق‌های صفحه را معین نمی کنند (مثلاً آن‌طور که درحالت مفروض‌بودن دایره و مرکز آن، تعیین می‌شوند).

۲. به‌کمك رسم خط‌های راست، برخورد و تصویر، نمی‌توان خط راست بی‌نهایت دور و گسترهٔ مطلق برآن را (با نقطه‌های سیکلیك به‌عنوان نقطه‌های مضاعف)، معین کرد.

در واقع، اگر بتوانیم مطلق‌های صفحه و یا، دست کم، خط راست بی‌نهایت دور را، تنها بارسم‌خط‌های راست، پیدا کنیم، آن‌وقت می‌توانیم همهٔ این ساختمان را طوری بریك صفحهٔ دوم تصویر کنیم که خط راست بی‌نهایت دور برخط راست‌کاملاً دلخواه g و گسترهٔ مطلق J_1 و J_2 درگسترهٔ (موهومی) مفروضی بر g قرار گیرد.

به‌وسیلهٔ همین عمل‌ها، که به‌کمك آن‌ها خط راست بی نهایت دور صفحهٔ اول پیدا می‌شود، می‌توان خط راست کاملاً دلخواه g را ساخت. به‌این ترتیب، باید بتوانیم با این عمل‌ها، نه‌تنها یك خط راست معین، بلکه هرخط راست دلخواه از صفحه را پیدا کنیم، که ممکن نیست.[۱۰۷]

۳. خط راست بی‌نهایت دور در هندسهٔ خالص، که تنها به بستگی‌های مربوط به‌موقعیت‌ها و موضع‌ها نظر دارد و نه به‌نتیجهٔ اندازه‌گیری‌ها، هیچ گونه مقام خاص و استثنائی ندارد. خط راست بی‌نهایت دور ، مثل

هرخط راست دیگر است، زیرا به‌کمك تصویر، می‌تواند برهر خط راست دیگری قرار گیرد.

خط راست بی‌نهایت دور نمی‌تواند به‌کمك تصویر و برخورد، و بدون استفاده از هر گونه اندازه‌گیری، معین شود؛ آن را نمی‌توان در هیچ رابطهٔ مجسمی از شکل‌ها، که شامل هیچ گونه اندازه گیری نیست، وارد کرد.

۴. بنابراین، به‌کمك رسم خط‌های راست، نمی‌توان پاره خط راست را نصف کرد، زیرا اگراین امکان وجود داشت، می‌شد خط راست بی‌نهایت دور را هم به‌کمك عمل‌های مجسم مشخص کرد که، با توجه به‌آن‌چه گفتیم، ممکن نیست.

به‌همین ترتیب، مرکز یك دایرهٔ مفروض در صفحهٔ شکل را هم نمی‌توان، تنها با رسم خط‌های راست، پیدا کرد، زیرا در این صورت، می‌توانستیم مطلق‌های صفحه را هم، به‌کمك عمل‌های مجسم، معین کنیم، که ممکن نیست.

۵. اگر یك مقطع مخروطی در صفحهٔ شکل داده شده باشد، آن‌وقت می‌توان با رسم‌خط‌های راست، هرمسألهٔ مجسم درجهٔ دوم را حل کرد. ولی حتی‌یکی ازمسأله‌های متریك راهم نمی‌توان به‌نتیجه رسانید؛ مثلاً نمی‌توان پاره‌خطی‌را نصف کرد،زیرا دراین‌صورت می‌توانستیم مطلق‌های‌صفحه راهم مشخص کنیم. ولی وقتی که ازمقطع مخروطی، تنها محیط آن درصفحهٔ شکل داده شده باشد، نمی‌توان مطلق‌های صفحه را مشخص کرد.

ولی اگر دایره‌ای همراه با مرکزآن، یا یك مربع، یا مقطع مخروطی همراه با مرکز و یکی از کانون‌های آن مفروض باشد، آن‌وقت مطلق‌های صفحه مشخص می‌شوند و می‌توان، هرمسألهٔ ساختمانی درجه اول و درجه دوم را، تنها با رسم خط‌های راست حل کرد.

§ ۳۵. اثبات ناممکن بودن حل هرمسألهٔ درجه دوم به‌کمك رسم خط‌های راست و انتقال پاره خط‌ها

۱. در این بند، انتقال پاره خط‌ها، به‌کمك مقیاس طول (پاره‌خطی با

طول مفروض که ما آن را به‌عنوان واحد می‌پذیریم.) انجام می گیرد (§۲۶).
ثابت خواهیم کرد که هرمسألهٔ درجه دومی را نمی‌توان به کمك این وسیله‌های محدود حل کرد. ولی پیش ازآن، به‌این پرسش پاسخ می‌دهیم که چه مساله‌هایی را می‌توان به‌یاری این وسیله‌ها حل کرد.

۲. تصور تحلیلی مختصات نقطه‌ها، که با رسم خط‌های راست و انتقال پاره‌خط‌ها به‌دست می آیند.

a) دستگاه مختصات قائم را در نظرمی گیریم وهمهٔ نقطه‌های مفروض را، به‌کمك مختصات آن‌ها، در آن وارد می کنیم.

اگر $P_۱$،$P_۲$ و $P_۳$،$P_۴$ دو زوج نقطهٔ مفروض باشند، معادلهٔ دو خط راستی که این دو زوج نقطهٔ را به‌هم می‌پیوندند، چنین‌اند:

$$y-y_۱=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}(x-x_۱),$$

$$y-y_۳=\frac{y_۴-y_۳}{x_۴-x_۳}(x-x_۳)$$

با پیدا کردن مختصات نقطهٔ برخورد این دوخط راست، معلوم می‌شود که، این مختصات، تنها به‌کمك عمل‌های گویا، روی مختصات نقطه‌های $P_۱$،$P_۲$،$P_۳$ و $P_۴$ به‌دست می آیند.

اگر این نقطهٔ برخورد را به‌نقطهٔ مفروض دیگری وصل کنیم و نقطهٔ برخورد خط راست تازه را با خط راست دیگری که به‌وسیلهٔ نقطه‌های مفروضی مشخص شده است، به‌دست آوریم و غیره، آن وقت معلوم می‌شود که مختصات هر نقطه‌ای که ممکن‌است ازنقطهٔ مفروض وبه کمك رسم‌خط‌های راست به‌دست آید، با عددهایی بیان می‌شوند که می‌توان آن‌ها را از مختصات نقطه‌های مفروض و به‌کمك عمل‌های گویا نتیجه گرفت. ضریب زاویهٔ این‌خط‌های راست هم، نسبت به‌مختصات نقطه‌های مفروض، گویاست (مثلاً $m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$).

بنابراین، اگر از یك نقطهٔ مفروض (یا یك نقطه‌ای که به‌دست آورده‌ایم)، خط‌راستی موازی باخط راست دیگری (که قبلاً رسم کرده‌ایم)

بکشیم و نقطهٔ برخورد این خط راست را با خط راست دیگری (کــه قبلاً ساخته‌ایم) به‌دست آوریم، مختصات این نقطه همیشه باعددهایی بیان‌می شوند که می‌توانند نتیجه‌ای ازعمل‌های گویا روی مختصات نقطه‌های مفروض باشد.

b) انتقال پاره‌خط را می‌توان با انتقال آن به‌موازات خود و، سپس، دوران دور یکی از دو انتهای آن تحقق بخشید.

انتقال موازی، به‌نقطهٔ برخورد خط‌های راست و به‌خط راست‌موازی خط راست مفــروض نیاز دارد، یعنی تنهــا با انجام عمل‌های گویــا روی مختصات مفروض، تحقق می پذیرد.

c) اکنون به بررسی دوران پاره‌خط می‌پردازیم.

در دستگاه مختصات قائم xOy (شکل ۱۴۰)، زاویهٔ ω به‌کمك نقطهٔ C به‌مختصات (a, b) و نقطهٔ P به مختصات (x, y) داده شده است. می‌خواهیــم نقطهٔ P را دور O به‌اندازهٔ زاویهٔ ω دوران دهیم و مختصات (x', y') نقطهٔ P' را، که از این راه به‌دست می‌آید، پیدا کنیم.

داریم:

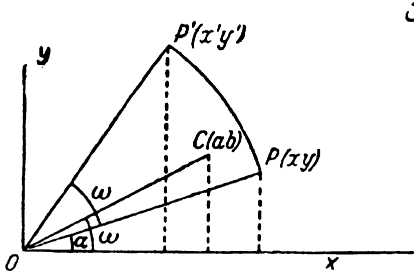
$$x' = r\cos(\alpha+\omega) = r\cos\alpha\cos\omega - r\sin\alpha\sin\omega$$

و چون

$$\cos\omega = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\omega = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$r\cos\alpha = x،\quad r\sin\alpha = y$$

بنابراین



شکل ۱۴۰

$$x' = \frac{a}{\sqrt{a^۲+b^۲}}x - \frac{b}{\sqrt{a^۲+b^۲}}y$$

و به‌همین‌ترتیب

$$y' = \frac{b}{\sqrt{a^۲+b^۲}}x + \frac{a}{\sqrt{a^۲+b^۲}}y$$

در ضمن، ریشه‌ها را با علامت مثبت درنظر گرفته‌ایم.

از این جا نتیجه می‌گیریم که مختصات (x', y') نقطهٔ مجهول P' را می‌توان، از مختصات نقطه‌های مفروض C و P، به‌کمك عمل‌های گویا و ریشهٔ دوم مجموع دومربع به‌دست آورد.

d) بنابراین، اگر نقطه‌های M و N، حاصل رسم خط‌های راست و جابه‌جایی پاره‌خط‌ها باشند، آن وقت مختصات نقطه‌های M و N را همیشه می‌توان از مختصات نقطه‌های مفروض و از راه انجام عمل‌های گویا و استخراج ریشهٔ دوم از مجموع دومربع، به‌دست آورد. همین وضع درمورد پاره‌خط MN هم برقرار است.

به‌این ترتیب، به‌این قضیه می‌رسیم: اگر یك شکل هندسی به‌کمك خط‌کش یك لبه و مقیاس طول به‌دست آمده باشد، مختصات نقطه‌های به‌دست‌آمده باید چنان تابع‌هایی از مختصات نقطه‌های مفروض باشند، که برای تعیین آن‌ها، تنها چهار عمل گویا و استخراج ریشهٔ دوم از مجموع دو مربع لازم شود؛ در ضمن، تعداد این عمل‌ها، باید متناهی باشد.

۳. اکنون ثابت می‌کنیم که همهٔ مسأله‌های ساختمانی هندسه را نمی‌توان به‌کمك این وسیله‌های محدود حل کرد.

برای این منظور، حوزهٔ معین Ω را از عددهای جبری می‌سازیم.

از عدد ۱ آغاز می‌کنیم ودرمورد آن، وهم درمورد هرعددی که به‌دست می‌آید، چهار عمل گویا وعمل پنجم $\sqrt{۱+\omega^۲}$ را به‌کار می‌بریم؛ در ضمن ω همیشه به‌معنای عددی است که به‌کمك همین پنج عمل به‌دست آمده است. مقدار ریشه را همیشه مثبت به‌حساب می‌آوریم.

این حوزهٔ عددی شامل مختصات و فاصله‌های همهٔ نقطه‌هایی است که ممکن است ازدونقطهٔ (۰، ۰) و(۰، ۱)، دردستگاه محورهای مختصات قائم،

به‌کمك رسم خط‌های راست و جا به‌جایی پاره‌خط‌ها به‌دست آیند.

مثلاً پاره‌خط $\sqrt{2}$ دراین حوزه وجود دارد، ولی ازپاره‌خط زیر، در این حوزه، خبری نیست:

$$s=\sqrt{2\sqrt{2}-2}$$

حوزهٔ ما، درواقع، تنها شامل عـددهای حقیقی است، زیرا ازیك عدد حقیقی آغازکردیم وعـدد موهومی را نمی‌توان، به‌کمك پنج عمل مفروض، ازعددهای حقیقی نتیجه گرفت.

سپس، اگر ω عددی از حوزهٔ مفروض بـاشد، عدد جبری مزدوج ω هم[158] متعلق به‌این‌حوزه‌است (واین،مستقیماً ناشی ازخودتعریف‌حوزهٔΩ است).

بنابراین، حوزهٔ عددی Ω، تنها شامل عددهایی است که هم خود آن‌ها وهم مزدوج جبری‌آن‌ها، عددهایی حقیقی‌باشند. ولی مزدوج‌عدد s، یعنی‌عدد

$$s'=\sqrt{-2\sqrt{2}-2}$$

عددی‌موهومی است. درنتیجه، عددهای s و s' متعلق به‌حوزهٔ عددی Ωنیستند.

اکنون این مساله را مطرح می‌کنیم.

وتر ویکی ازضلـع‌های مجاور بـه‌زاویهٔ قائمه درمثلث قائم‌الـزاویه‌ای، به‌ترتیب، $c=1$ و $a=\sqrt{2}-1$ هستند. می‌خواهیم ضلـع دیگر مجاور به‌زاویهٔ قائمه را، به‌کمك وسیله‌های محدود خود، بسازیم.

هر دوعدد a و c درحوزهٔ Ω قراردارند. ضلع مجهول برابر است با $\sqrt{2\sqrt{2}-2}$، واین عـدد درحوزهٔ Ω واقع نیست. بنابـراین، این مساله را نمی‌توان با وسیله‌های محدود خود حل کرد، درحالی کـه با دراختیار داشتن پرگار وخط‌کش، مستقیماً حل می‌شود.

§ ۳۶. اثبات ناممکن‌بودن حل‌دقیق آن مساله‌های هندسی که به معادله‌های درجه سوم غیرقابل تبدیل منجر می‌شوند: به‌کمك رسم خط‌های راست و دایره‌ها

دراین بند ثابت می‌کنیم که مساله‌های درجه سوم هندسی را، وقتی که

معادلهٔ درجه سوم متناظر بـا آن غیرقابل تبدیل باشد،[۱۵۹] نمی‌توان به‌کمك پرگار وخط کش حل کرد.

برای این‌کـه بـه اثبات این حکم برسیم، قبلاً چند مفهوم جبری را یادآوری می کنیم.

۱. حوزهٔ عمل‌های گویا

ازعدد a آغاز می کنیم و روی آن وهمهٔ عددهایی که به‌دست می آید، عمل‌های گویا، یعنی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم (بـه‌جز تقسیم برصفر) را مجازمی‌شناسیم. ازاین راه، مجموعه‌ای نامتناهی ازعددها به‌دست می آیدکه آن را حوزهٔ عمل‌های گویا می‌نامند.

به‌این ترتیب به‌چنان حوزهٔ عددی (چارچوبی از عددها) می‌رسیم که اگر، روی عددهای آن، عمل‌هـای گویا را انجام دهیم، بازهم به عددهای دیگری ازهمین حوزه می‌رسیم.

درحالتی‌کـه a عددی گویا باشد، بـه‌کمك عمل‌های گویا، به همهٔ عددهای گویا، یعنی به‌حوزهٔ عددهای گویا می‌رسیم.

۲. R_1 را حوزهٔ همهٔعددهای گویا و a را عددگویای‌معینی می گیریم.

اگر R_1 را با $\sqrt{a}$، به کمك عمل‌های گویا ترکیب‌کنیم و در مورد همهٔ عددهایی هم‌کـه ازاین راه بـه‌دست می آیند، همین عمل‌های گویا را انجام دهیم، به حوزهٔ تازهٔ R_2 ازعمل‌های گـویا می‌رسیم‌که، R_1 بخشی یا زیرمجموعه‌ای از آن است.

عدد $z_1=m_1+n_1\sqrt{a}$ درحـوزهٔ R_2 وارد شـده است (m_1 و n_1، عددهایی گویا هستند)، زیرا عدد z_1 ازعددهای m_1 و n_1 و $\sqrt{a}$ و به کمك عمل‌های گویا به‌دست آمده است.

همهٔ عددهای حوزهٔ R_2 را می‌توان به‌صورت $M+N\sqrt{a}$ نـوشت، که درآن، M و N متعلق به‌حوزهٔ R_1، یعنی عددهایی گویا هستند.

درواقع، حوزهٔ R_2 از راه عمل‌های گـویا روی $\sqrt{a}$ و عـددهـای حوزهٔ R_1 و، سپس، روی عـددهایی‌کـه از این راه به‌دست می‌آیند، ساخته می‌شود. اگر z_1 و z_2 را عددهایی بگیریم که ازطریق اول به‌دست آمده‌اند، باید به‌این صورت باشند:

$$z_1=m_1+n_1\sqrt{a}\ ,\qquad z_2=m_2+n_2\sqrt{a}$$

اگر z_1 و z_2 را با هم جمع و یا ازهم کم کنیم، به‌نتیجه‌ای به صورت $M+N\sqrt{a}$ می‌رسیم. اگر آن‌ها را درهم‌ضرب کنیم، بازهم به‌نتیجهٔ مشابهی می‌رسیم. درحالت $\frac{z_1}{z_2}$ هم، اگر مخرج کسر را گویا کنیم، عمل‌های لازم را در صورت کسر انجام دهیم و، بالاخره، دوجملهٔ صورت را به‌طور جداگانه برمخرج تقسیم کنیم، به‌صورت $M+N\sqrt{a}$ می‌رسیم که در آن، M و N عددهایی از حوزهٔ R_1 هستند.

به‌این ترتیب می‌توان گفت: اگر به‌حوزهٔ عددهای گویا، عدد $\sqrt{a}$ را اضافه کنیم، که در آن، a عددی است گویا، آن وقت حوزهٔ جدیدی از عمل‌های گویا به‌دست می‌آید و هر عدد ازاین حوزهٔ گسترش یافتهٔ عمل‌های گویا، به صورت $M+N\sqrt{a}$ درمی‌آید که‌درآن، M و N عددهایی ازحوزهٔ نخستین یعنی عددهایی گویا هستندکه، درحالت خاص، برابرصفرهم می‌توانند باشند.

۳. R_1 را دوباره، حوزهٔ عددهای گویا می‌گیریم.

اگر مثلاً، عدد $\sqrt{3}$ را دراین حوزه وارد کنیم، به حوزهٔ جدید R_2 می‌رسیم که همهٔ عددهای آن به‌صورت $m+n\sqrt{3}$ در می‌آیند (m و n، عددهایی گویا هستند).

ولی حوزهٔ R_2، شامل عدد $\sqrt{5}$ نیست، زیرا در غیر این‌صورت باید داشته باشیم:

$$m+n\sqrt{3}=\sqrt{5}$$

که با توجه به‌گویا بودن عددهای m و n، ممکن نیست.

اگرعدد $\sqrt{5}$ را به‌حوزهٔ R_2 وارد کنیم، به‌حوزهٔ جدید R_3 می‌رسیم. همهٔ عددهای این حوزه، به صورت $k+l\sqrt{5}$ هستند، که در آن، k و l عددهایی ازحوزهٔ R_2خواهند بود، بنابراین، شامل $\sqrt{3}$ هم‌می‌توانندباشند.

۴. دوباره از حوزهٔ R_1 عددهای‌گویا آغازمی‌کنیم و عدد $\sqrt{a_1}$ (a_1 عددی گویاست) را درآن وارد می‌کنیم، از این راه به‌حوزهٔ R_2 می‌رسیم؛

عدد $\sqrt{a_2}$ را در آن‌وارد می کنیم (a_2، ونه $\sqrt{a_2}$، عددی ازحوزهٔ R_2 است)، به‌حوزهٔ R_3 می‌رسیم؛ عدد $\sqrt{a_3}$ را دراین حوزه وارد می کنیم (a_3 متعلق به حوزهٔ R_3 است) و غیره.

بالاخره، با وارد کردن $\sqrt{a_{n-1}}$ به‌حوزهٔ R_n و، سپس، با وارد کردن $\sqrt{a_n}$ به‌حوزهٔ R_{n+1} می‌رسیم. هرعددازحوزهٔ اخیر، به‌صورت $p+q\sqrt{a_n}$ درمی آید، که در آن، p و q و a_n به‌حوزهٔ قبل از آن تعلق دارند.

۵. عدد z را درنظر بگیرید که ازسایر عـددهای مفروض و به‌کمك عمل‌های گویا وعمل ریشهٔ دوم به‌دست آمده و صورتی کاملاً دلخواه داشته باشد، مثلاً فرض کنید:

$$z=\frac{\sqrt{a+\sqrt{b}-\sqrt{c}}}{\sqrt{m-\sqrt{n}}}$$

که در آن، a، b، c m و n عددهایی گویا هستند.

اگـر پشت سـرهم، ریشه‌های دوم را وارد کنیم، می‌توانیم از حوزهٔ عددهای گویا به‌حوزه‌ای برسیم که شامل عدد z باشد. اگر به حوزهٔ R_1 از عددهای گویا، عدد $\sqrt{b}$ را اضافه کنیم، به‌حوزهٔ R_2 می‌رسیم که شامل عدد $a+\sqrt{b}$ است. اکنون اگرعدد $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ را بـه حـوزهٔ R_2 و، سپس، به حوزهٔ R_3 که به‌این ترتیب بـه‌دست می آید، عدد $\sqrt{c}$ را وارد کنیم، بـه حوزهٔ R_4 می‌رسیم که عدد صورت کسر z در آن وجود دارد. اگر بعد، عدد $\sqrt{n}$ را به‌حوزهٔ R_4 واردکنیم، حوزهٔ جدید R_5 به‌دست می آیدکه شامل‌عدد $m-\sqrt{n}$ است. سرانجام، اگر عدد $\sqrt{m-\sqrt{n}}$ را در R_5 واردکنیم، بـه حوزهٔ R_6 می‌رسیم که عددهای واقع درصورت ومخرج کسر z و، بنابراین، خود عدد z، در آن قراردارند.

به‌این ترتیب، با آغاز از عددهای گـویـا، توانستیم به حوزه‌ای از عمل‌های گویا برسیم که شامل عدد z باشد.

۶. اکنون درموقعیتی هستیم که‌می‌توانیم ثابت کنیم که،یك معادلهٔ‌درجه

سوم را، به‌شرطی که ریشهٔ گویا نداشته باشد، نمی‌توان به‌کمك ریشه‌های دوم حل کرد.

A) معادلهٔ زیر را درنظرمی گیریم:

$$x^3+ax=b \qquad (1)$$

که درآن، a، b و c عددهایی گویا هستند. ریشه‌های این معادله را x_1، x_2 و x_3 فرض می کنیم، دراین صورت، باتوجه به صفر بودن ضریب x^2، باید داشته باشیم:

$$x_1+x_2+x_3=0 \qquad (2)$$

فرض را براین می گیریم کــه هیچ‌کدام از این ریشه‌ها، عددی گویا نباشند وثابت می کنیم کــه، دراین صورت، هیچ کــدام ازآن‌ها را نمی‌توان به‌کمك ریشه‌های دوم بیان کرد.

اثبات. حکم را با برهان خلف ثابت می‌کنیم. فرض می کنیم یکی از ریشه‌ها، و مثلاً x_1، قابل بیان برحسب ریشه‌های دوم باشند.

درچنین‌صورتی، باید بتوان با واردکردن ریشه‌های دوم، حوزه‌ای از عمل‌های گویا ساخت‌که شامل x_1 باشد. اگر $\sqrt{l}$ آخرین ریشهٔ دومی باشد که وارد درحوزهٔ قبلی کرده‌ایم، آن‌وقت باید داشته باشیم:

$$x_1=m+n\sqrt{l} \qquad (3)$$

که درآن، m و n و l باید متعلق به‌حوزهٔ قبلی عمل‌های گویا باشند. اگراین مقدار x رادررابطهٔ (1) قراردهیم، به‌دست می آید:

$$M+N\sqrt{l}=0 \qquad (4)$$

که درآن داریم:

$$M=m^3+3mn^2l+am-b \quad , \quad N=3m^2n+n^3l+an$$

بنابراین M و N و l متعلق به‌حوزهٔ عمل‌های گویای قبلی هستند؛ $\sqrt{l}$ متعلق به‌آن نیست و، بنابراین، $\sqrt{l}$ نمی‌تواندبرابر $-\frac{M}{N}$ باشد.

درنتیجه، برابری(۴) تنها وقتی می‌تواند برقرار باشد که داشته‌باشیم: $M=0$ و $N=0$. دراین صورت باید

$$x_2 = m - n\sqrt{l} \qquad (۵)$$

هم‌درمعادلهٔ (۱) صدق کند، که به کمك محاسبه، می‌توان درمورد آن قانع‌شد.

سپس، ازرابطهٔ (۲) نتیجه می‌شود:

$$x_3 = -(x_1 + x_2) = -2m \qquad (۶)$$

این نتیجه گیری را می‌توان این‌طور بیان کرد: اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ (۱) به کمك ریشه‌های دوم قابل بیان باشد، می‌توان با وارد کردن ریشه‌های دوم، به‌حوزه‌ای رسیدکه شامل x_1 باشد؛ همین حوزه باید شامل دومین ریشهٔ معادله هم باشد؛ و دراین‌صورت، سومین ریشهٔ معادله، یعنی x_3، متعلق به‌حوزهٔ قبلی خواهد بود.

ولی، اگر x_3 متعلق بــه‌حوزهٔ قبلی باشد، با استدلال مشابهی می‌توان ثابت کردکه x_1 یا x_2 باید متعلق به‌حوزهٔ بازهم قبل‌ترباشد و غیره. از این راه، سرانجام، به‌حوزهٔ عددهای گویا می‌رسیم.

می بینیم کــه، بافرض قابل بیان بــودن یکی از ریشه‌های معادلهٔ (۱) به‌کمك ریشه‌های دوم، به‌این نتیجه می‌رسیم کــه، دست‌کم، یکی ازریشه‌های معادله، عددی گویاست، واین، فرض ما را نقض می‌کند. به‌این ترتیب، ثابت می‌شودکه معادلهٔ درجه سوم (۱) را، به‌شرطی‌که ریشهٔ گویائی نداشته باشد، نمی‌توان به‌کمك ریشه‌های دوم حل کرد.

B) معادلهٔ درجه سوم کامل

$$z^3 + Az^2 + Bz + C = 0 \qquad (۱)$$

را می‌توان به‌یاری تبدیل

$$z = x - \frac{A}{3} \qquad (۲)$$

به‌صورت زیر درآورد:

$$x^3 + ax = b \qquad (۳)$$

یعنی، معادلهٔ کامل درجه سوم را، بدون استفاده از ریشه‌های دوم، می‌توان به‌صورت (۳) درآورد. واین، به‌معنای آن است که یا دومعادلهٔ (۱) و (۳)، هردوباهم دارای ریشه‌های گویا هستند ویا هیچ‌کدام از آن‌ها، ریشهٔ گویائی ندارند.

بنابراین. حکم خود را می‌توانیم به‌صورت کلی‌تر زیر تنظیم کنیم: هر معادلهٔ درجه سوم با ضریب‌های گویا را، به شرطی‌که ریشه‌های گویا نداشته باشد، نمی‌توان به‌کمك رادیکال‌های با فرجهٔ ۲ (ریشه‌های دوم) حل‌کرد.

c) اکنون باید راهی را پیدا کنیم که، به‌کمك آن، بتوانیم مشخص کنیم: آیا یك معادلهٔ درجهٔ سوم مفروض با ضریب‌های گویا، ریشهٔ گویائی دارد یانه!

این راه را به‌کمك این قضیه پیدا خواهیم کرد: اگر معادله‌ای دارای ضریب‌های درست باشد و، در ضمن، ضریب بزرگترین درجهٔ مجهول‌آن برابر $+1$ باشد، در آن‌صورت، هرریشهٔ درست معادله باید مقسوم‌علیه درستی از مقدار ثابت (جملهٔ آزاد) معادله باشد.

اثبات. این معادله را در نظر می‌گیریم:

$$x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n=0 \qquad (1)$$

که در آن، a_1، a_2،...،a_n، عددهایی درست‌اند.

اکنون فرض می‌کنیم، عددگویای $\frac{p}{q}$ ریشه‌ای از این معادله باشد، علاوه‌برآن، p و q را می‌توان عددهای درستی به‌حساب آورد که نسبت به‌هم اول‌اند. در این‌صورت، باید برابری زیر برقرار باشد:

$$p^n+a_1p^{n-1}q+\dots+a_{n-1}pq^{n-1}+a_nq^n=0 \qquad (2)$$

اگر دو طرف برابری (۲) را بر q تقسیم‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{p^n}{q}+a_1p^{n-1}+\dots+a_{n-1}pq^{n-2}+a_nq^{n-1}=0 \qquad (3)$$

همهٔ جمله‌ها، با آغاز ازجملهٔ دوم به‌بعد، عددهایی درست‌اند، بنابراین

جملهٔ اول هم باید عددی درست باشد. چون q و p نسبت به‌هم اول‌اند،

تنها به‌شرط $q=1$، ممکن است $\frac{p^n}{q}$ برابر عددی درست شود.

هرریشهٔ گویا ازمعادلهٔ (۱)، عددی درست است.

$q=1$ می‌گیریم و دو طرف برابری (۲) را بر p تقسیم مـی‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$p^{n-1}+a_1p^{n-2}+\dots+a_{n-1}+\frac{a^n}{p}=0 \qquad (4)$$

ازاین برابری معلوم می‌شود که $\frac{a_n}{p}$ باید عـدد درست، یعنی p مقسوم علیـه درستی از a_n باشد.

به‌این ترتیب، اگر بامعادله‌ای سروکار داشته باشیم که ضریب بزرگترین درجهٔ آن برابـر ۱ + و سایر ضریب‌ها عددهایـی درست باشند، آن‌وقت بدون هیچ زحمتی می‌توانیم روشن کنیم که آیا این معادله، ریشه‌های گویا دارد یا نه! برای این‌منظور، همهٔ مقسوم‌علیه‌های درست (مثبت ومنفی) مقدار ثابت معادله را، در آن آزمایش می‌کنیم تا معلوم شود کدام‌یك از آن‌هـا در معادله صدق می‌کند. اگر هیچ‌یك از مقسوم‌علیه‌های درست مقدار ثابت درمعادله صدق نکند، به‌معنای آن است که، معادلهٔ مفروض، دارای ریشهٔ گویا نیست.

D) مثلاً، معادلهٔ $x^3-2=0$ را در نظر می‌گیریم؛ مسالـهٔ تضعیف (دوبرابرکردن) مکعب، به‌این معادله منجر می‌شود.

مقسوم‌علیه‌های عدد ۲ عبارتند از ۲ و۱، این دوعدد وقرینه‌های آن‌ها، هیچ‌کدام در معادله صدق نمی‌کنند. بنابراین، این معادله ریشهٔ گویا ندارد و به‌کمك رادیکال‌های با فرجهٔ ۲ قابل حل نیست.

اکنون معادله‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$y^3+y^2-2y-1=0 \quad \text{و} \quad y^3-3y+1=0$$

هرکدام ازاین معادله‌ها تنها می‌توانند ریشه‌های گویایی برابر۱ + یا ۱ −

داشته باشند، ولی از آن‌جا که این دو عدد در آن‌ها صدق نمی‌کنند، این معادله‌ها ریشهٔ گویا ندارند و، بنابراین، به کمك ریشه‌های دوم قابل حل نیستند.

۷. هرمساله‌ای که منجر به‌معادله‌ای غیرقابل حل به‌کمك ریشه‌های دوم بشود، نمی‌تواند بارسم خطهای راست ورسم دایره‌ها و، بنابراین، به‌کمك پرگار و خط‌کش حل شود.

a) درواقع، هرشکلی که باکمك این‌وسیله‌ها رسم شود، تنها می‌تواند شامل خطهای راست و دایره‌ها باشد.

اگر شکل مفروض را در دستگاه محورهای مختصات قائم در نظر بگیریم، پیدا کردن نقطه‌های برخورد به‌کمك محاسبه، منجر به‌معادله‌هایی خطی می‌شود؛ و برای پیداکردن نقطه‌های برخورد یك خط راست با یك دایره یا دو دایره، برمعادلهٔ درجه دوم می‌رسیم.

بنابراین، برای تعیین عنصرهای مختلف مساله، باید از معادله‌های درجه اول و درجه دوم استفاده کنیم؛ یعنی مختصات هرنقطه‌ای از این شکل دردستگاه محورهای قائم، باید برحسب مختصات نقطه‌های مفروض، به‌کمك عمل‌های گویا و ریشهٔ دوم قابل بیان باشد.

b) برعکس، اگرعبارتی مفروض باشد که تنها به‌وسیلهٔ عمل‌های گویا و ریشهٔ دوم بیان شود، می‌توان آن را به کمك پرگار و خط‌کش، با تکرار جمع و تفریق پاره خطها، رسم جزء چهارم یك تناسب هندسی، رسم واسطهٔ هندسی و استفادهٔ از قضیهٔ فیثاغورث رسم کرد.

c) به‌این ترتیب، اگر مساله‌ای منجر به‌معادله‌ای درجه سوم بشود که به‌کمك ریشه‌های دوم قابل حل نباشد، آن‌وقت، این مسأله نمی‌تواند به‌کمك پرگار و خط‌کش حل شود.

§ ۳۷. امکان یا عدم امکان حل مساله‌های هندسی به‌کمك پرگار و خط‌کش

۱. اغلب پیش می‌آید که، مسأله‌ای به‌ظاهر ساده، تن به‌حل با پرگار

و خط‌کش نمی‌دهد. در این موردها، باید بتوان روشن کرد کـه: آیا راه درستی بـرای حل انتخاب نکرده‌ایم یا این‌کـه، مسألهٔ ما، اصولاً به‌کمك پرگار وخط‌کش قابل حل نیست. بنابراین، نیاز به‌وسیله‌های ساده‌ای داریم تا، به‌کمك آن‌ها، بتوانیم قابل‌حل‌بودن یاغیرقابل حل‌بودن مسألهٔ موردنظر خود را ثابت‌کنیم (با § ۲۹ مقایسه کنید).

دربند قبل بایکی از این وسیله‌ها آشنا شدیم: مسأله را به‌یاری محاسبه حل می‌کنیم؛ اگـر به‌معادله‌ای رسیدیم که درجهٔ آن از ۲ تجاوز نمی‌کند، به‌معنای آن است‌که مسألهٔ ما قابل حل است، ولی اگر به‌معادلهٔ درجه سوم غیرقابل تبدیلی‌منجرشد،[۱۱۵] آن‌وقت مسألهٔ مفروض به‌کمك پرگاروخط‌کش قابل حل نیست.

همان‌طورکه بعداً خواهیم دید (§۴۷،۱)، حل هرمعادلهٔ درجه چهارم بستگی به‌حل معادلهٔ درجه سومی دارد که حلال معادلهٔ اول نامیده می‌شود. بنابراین، بسته به‌این‌که معادلهٔ حلال به‌کمك رادیکال‌های با فرجهٔ ۲ قابـل حل باشد یا نباشد، معادلهٔ درجهٔ چهارم وابسته به‌آن‌هم، قابل حل یاغیرقابل حل است.

برای معادله‌های از درجه‌های بالاتر، اغلب قضیهٔ زیر (از جبر) مفید است:

معادلهٔ از درجهٔ فردی که غیرقابل تجزیه باشد، در عبارتی‌که تنهاشامل رادیکال‌های با فرجه ۲ باشد، صدق نمی‌کند.

۲. ساده‌ترین وسیله‌ای‌که، به‌کمك آن مـی‌توان، بدون استفـاده از محاسبه‌های دشوار، قابل حل یا غیرقابل حل‌بودن یك مسأله را با پرگار و خط‌کش روشن‌کرد، براساس حکم‌های زیر قرار دارد:

اگر پنج عنصر مشخص‌کنندهٔ یك مقطع مخروطی، و مثلا پنج نقطهٔ آن، معلوم باشد، می‌توان نقطه‌های برخوردآن رابا هرخط راستی، به‌کمك‌پرگار و خط‌کش، پیدا کرد. (§۳۰).

رسم مماس از یك نقطهٔ مفروض بریك مقطع مخروطی‌هم (که به‌وسیلهٔ پنج عنصر خود معلوم باشد)، یك مسألهٔ قابل حل درجه دوم است.

در جبر، قضیه‌های زیر، که عکس حکم‌های بالا هستند، با دقت ثابت

می‌شوند.

a) اگر پیدا کردن نقطه‌های برخورد یك منحنی با یك خط راست به‌کمك پرگار و خط کش میسر باشد، آن وقت منحنی مفروض، یك مقطع مخروطی است.

b) تنها منحنی‌هایی‌که می‌توان مماس برآن‌ها را از نقطه‌ای دلخواه، به‌کمك پرگار و خط‌کش، رسم‌کرد، مقطع‌های مخروطی هستند.

c) دایره و خط راست، تنها منحنی‌هایی هستند که نقطه‌های برخورد آن‌ها را با هردایره‌ای، می‌توان به‌کمك پرگار و خط‌کش پیدا کرد.

منحنی‌های بغرنج‌تری هم وجود دارند که نقطه‌های برخورد آن‌ها را با خط‌های راست معین می‌توان به‌کمك پرگار و خط کش به‌دست آورد. مثلاً، وقتی که با حلزون پاسکال سر و کار داشته باشیم (§۴۶)، می‌توان نقطه‌های دوم برخورد خط‌های راستی را که از نقطهٔ مفروض منحنی می‌گذرند، به‌کمك پرگار و خط کش پیدا کرد. ولی خط راست باید از نقطهٔ مضاعف گذشته باشد و، بنابراین، نمی‌تواند خط راست دلخواهی باشد.

نقطه‌های برخورد حلزون پاسکال را با یك خط راست دلخواه، نمی‌توان به‌کمك پرگار وخط کش پیدا کرد.

۳. از این گزاره‌ها (که در بالا آوردیم)، برای اثبات قابل حل یا غیرقابل حل بودن مسأله زیر، به‌کمك پرگار و خط کش، استفاده می‌کنیم.

۲۰۵. دو خط راست g_1 و g_2، نقطهٔ دلخواه P و پاره‌خط دلخواه s مفروض‌اند. می‌خواهیم از نقطهٔ P خط‌راستی رسم‌کنیم‌که دربرخورد باخط‌های راست g_1 و g_2، پاره‌خطی برابر s پدید آورد.

هرتلاشی برای حل این مسألهٔ به‌ظاهر ساده، ما را به‌ناکامی می‌رساند، زیرا این مسأله، به‌کمك پرگار وخط کش، قابل حل نیست.

برای اثبات این‌حکم،ابتدا خط‌راست g_2 راکنار می‌گذاریم، از نقطهٔ P خط‌راست دلخواهی رسم می‌کنیم و روی آن، از نقطهٔ برخورد با g_1، پاره‌خط s را جدا می‌کنیم.

مکان هندسی نقطه‌های x، که از این طریق به‌دست می‌آیند، یك‌منحنی c راتشکیل می‌دهد؛اگرمحل برخورد منحنی c را با g_2 به‌نقطهٔ P وصل کنیم،

خط‌راست مجهول به‌دست می‌آید.

خود خط‌راست g_2، خط‌راست دلخـواهی از صفحه است. بنابراین، اگر بشود نقطهٔ برخوردآن‌را بامنحنی c، به‌کمك پرگار وخط‌کش،پیدا کرد، به‌معنای آن است‌که، منحنی c، یك مقطع مخروطی است.

ولی منحنی c یك‌مقطع مخروطی نیست؛ این منحنی، با توجه به‌روش تشکیل آن، یك‌کنکوئید است (§۴۵).

به‌این ترتیب، مسألهٔ ما به‌کمك پرگار وخط‌کش قابل حل نیست.

۴. در مورد بسیاری از مسأله‌های دیگر هم، می‌توان شبیه مسألهٔ بالا عمل‌کرد و مشخص‌کرد که آیا مسألهٔ موردنظر مـا، از درجهٔ دوم است یـا از درجه‌ای بالاتر.

در مسأله، نقطه‌ای مثل X خواسته شده است‌که باید روی خط راست مفروض g یا دایرهٔ مفروض k واقع باشد. اگر g یا k را کنار بگذاریـم ، آن‌وقت مسألهٔ مفروض، به‌جای یك جواب، بی‌نهایت جواب پیدا مـی‌کند. برای نقطهٔ x، یك مکان هندسی به‌دست می‌آید.

اکنون، اگر نقطهٔ X بخواهد بر خط راست g قرار گیرد، باید ایـن مکان هندسی یا خط راست باشد ویا یك مقطع مخروطی (و درحالت خاص، دایره)؛ تنها در این صورت است که مسأله به‌کمك پرگار و خط‌کش قابل حل می‌شود و اگر نقطهٔ X باید بردایرهٔ k قرار گیرد، آن وقت، ایـن مکان هندسی باید خط راست یا دایره باشد، تا بتوان به‌کمك پـرگار و خط‌کش به‌نتیجه رسید.

۵. به‌این ترتیب، مسأله ممکن است منجر به‌رسم خـط راستی مثل x شودکه باید ازنقطهٔ P بگذرد یا بردایرهٔ معین K یامقطع مخروطی S مماس باشد.

اگر P، K یا S را کنار بگذاریم، برای x یك مکان هندسی به‌دست می‌آید وبه‌کمك قضیه‌های a)، b) وc) می‌توان قابل‌حل یا غیرقابل‌حل بودن مسأله را به‌کمك پرگار وخط‌کش روشن‌کرد.

۶. **یادداشت.** از آن‌چه گفتیم، مـی‌توان روش کلی حل مسأله‌هـای ساختمانی هندسه را نتیجه گرفت.

مسأله منجر به‌جست‌وجوی نقطهٔ X می‌شود که باید برخط راست g قرار گیرد. بعد، g را کنار می‌گذاریم ومکان هندسی نقطهٔ X را پیدا می‌کنیم. اگر مسأله به‌کمك پرگار و خط‌کش قابل حل باشد، باید این مکان هندسی، یك مقطع مخروطی از آب درآید. نقطه‌های برخورد آن با خط راست g، نقطه‌های مجهول را به‌ما می‌دهند.

۲۰۶. دایرهٔ K به‌مرکز O و دو نقطهٔ دلخواه A و B مفروض‌اند. نقطهٔ X را روی دایرهٔ K طوری پیدا کنید که زاویهٔ XAB، به‌وسیلهٔ مماس بردایره در نقطهٔ X، نصف شود.

آیا این مسأله، به‌کمك پرگار و خط‌کش، قابل حل است؟ نقطه‌های A و B چه موقعیتی داشته باشند تا با مسأله‌ای درجه دوم سر وکار داشته باشیم؟ (با §۶ مقایسه کنید.)

فصل هفتم

تقسیم دایره
رسم چند ضلعی‌های منتظم

§ ۳۸. مقدمه

۱. می‌دانیم که یك رشته ازچند ضلعی‌هـای منتظم را می‌توان به‌کمك پرگار وخط کش رسم کرد؛ واین معادل آن است که بخواهیم محیط دایره را به‌بخش‌های برابر تقسیم کنیم. شش‌ضلعی، سه‌ضلعی، دوازده‌ضلعی، ده‌ضلعی، و پنج‌ضلعی منتظم را می‌توان به‌کمك پرگار وخط کش رسم کرد.

ولی به‌کمك پرگار وخط کش، نمی‌توان هفت ضلعی و نه ضلعی منتظم را ساخت، درحالی که، می‌توان هفده ضلعی منتظم را (به‌طوری‌که خواهیم دید) به‌کمك پرگار وخط کش رسم کرد.

دراین فصل، با مساله‌هایی ازاین‌گونه سروکار داریم.

۲. دایره‌ای به‌شعاع ۱ را مفروض‌می‌گیریم (همیشه می‌توان شعاع هر دایره‌ای را واحد به حساب آورد). ضلع n ضلعی منتظم محاط دراین دایره را c_n می‌نامیم.

به‌سادگی وبـه‌کمك مثلث متساوی‌الساقین و مثلث قائم‌الزاویه‌ای که به‌دست می‌آید، می‌توان نتیجه گرفت:

$$c_n = ۲\sin\frac{\pi}{n}$$

به‌کمك ضلع n ضلعی منتظم می‌توان ضلع $۲n$ ضلعی منتظم، یعنی $c_{۲n}$

را محاسبه‌کرد که برابر است با $۲sin\frac{\pi}{۲n}$. برای این‌منظور ازدستورزیر استفاده می‌کنیم:

$$۱-cos\alpha=۲sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}$$

ازاین جا به‌دست می‌آید:

$$۱-\sqrt{۱-sin^{۲}\frac{\pi}{n}}=۲\,sin^{۲}\frac{\pi}{۲n}$$

و یا

$$۲-\sqrt{۴-c_n^۲}=c_{۲n}^۲\Rightarrow c_{۲n}=\sqrt{۲-\sqrt{۴-c_n^۲}}$$

بنابراین، ازروی ضلع شش‌ضلعی منتظم، می‌توان ضلع ۱۲ ضلعی، ۲۴ ضلعی، ۴۸ ضلعی منتظم وغیره را به‌دست‌آورد.

به‌کمك ضلع چندضلعی منتظم محاطی، می‌توان ضلع چند ضلعی منتظم محیطی‌راهم پیداکرد؛ ازهمین راه‌بودکه ارشمیدس به‌محاسبهٔ عدد π پرداخت.

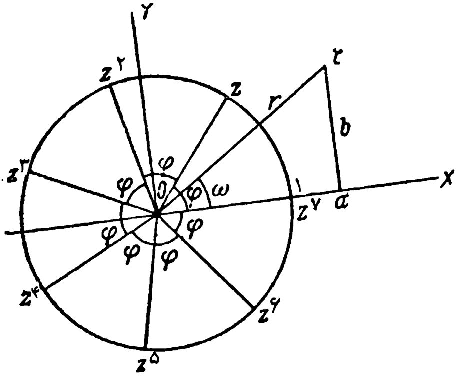
۳۹. § تصور هندسی عددهای مختلط

ابتدا باید چند کلمه‌ای دربارهٔ برداشتی‌کـه گوس از عددهای مختلط مطرح کـرد بگوییم، زیرا این مطلب، ارتباطی جدی با رسم چند ضلعی‌های منتظم دارد. باوجوداین، تنها به‌شرح جنبه‌هایی ازعددهای مختلط می‌پردازیم که، دراین‌جا، به‌آن‌ها نیاز داریم.

۱. عدد مختلط دلخواه $\zeta=a+bi$ را درنظر می‌گیریم.

a) دستگاه محورهای مختصات‌قائم را رسم‌می‌کنیم و، باتوجه به‌مقدار وعلامت عددهای a وb، نقطهٔ به مختصات $(a\,,\,b)$ را دراین دستگاه به‌دست می‌آوریم (شکل ۱۴۱).

هرعدد ζ متناظر بایك، وتنها یك‌نقطه از صفحه و، برعکس، هرنقطه از



شکل ۱۴۱

صفحه، متناظر با یك، وتنها یك‌عدد $\zeta=a+bi$ است. به‌این ترتیب، هرنقطه از صفحه را می‌توان نگاشتی از یك عدد مختلط دانست، یعنی ازاین طریق، نگاشت عددهای مختلط را برصفحه به‌دست آورد.

دو نقطهٔ صفحه، تنها وقتی برهم منطبق می‌شوند که‌عددهای مختلط‌متناظر با آن‌ها، برابر با یکدیگر باشند. بنابراین، اگر دوعدد مختلط $\zeta=a+bi$ و $\zeta'=a'+b'i$ باهم برابر باشند، باید داشته باشیم: $a=a'$ و $b=b'$.[111]

b) باآغاز ازاین نگاشت، به‌روش مهم وجالبی برای نمایش عددهای مختلط می‌رسیم.

پاره خط $O\zeta$ را با r نشان می‌دهند (شکل ۱۴۱)؛ آن را همیشه مثبت به حساب می‌آورند و قدرمطلق (یا کالبد) عدد مختلط می‌خوانند؛ زاویهٔ ω، که به‌وسیلهٔ عدد مختلط داده می‌شود، آوند (یا آرگومان) نامیده می‌شود. از شکل نتیجه می‌شود:

$$a=r\cos\omega \quad , \quad b=r\sin\omega$$

بنابراین، عدد ζ را می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$\zeta=r(\cos\omega+i\sin\omega)$$

این روش نمایش عددهای مختلط، به خصوص ارزش خود را در رابطهٔ موآور ($Moivre$) نشان می‌دهد:

$$\zeta^n=r^n(\cos n\omega+i\sin n\omega)$$

این‌رابطه را برای حالتی که n عددی‌درست باشد، به‌سادگی می‌توان ثابت کرد (و ماهم، برای کارخود، به‌همین حالت نیاز داریم).

۲. ازاین به بعد، تنها ازعددهای مختلطی استفاده می‌کنیم که قدرمطلقی برابر ۱ داشته باشند. z را چنین عدد فرض می‌کنیم، دراین‌صورت داریم:

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

بنابررابطهٔ موآور به‌دست می‌آید:

$$z^{2} = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$$

$$z^{3} = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z^{n} = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

نقطه‌های متناظر این‌توان‌های z، روی محیط دایرهٔ به‌شعاع واحد قرار می‌گیرند (شکل ۱۴۱). آوند عدد z^{2} برابر 2φ، آوند عدد z^{3} برابر 3φ و آوند عدد z^{n} برابر $n\varphi$ است.

روی شکل، z^{7} بر ۱ منطبق شده است. بنابراین $z^{7} = 1$؛ و z ریشهٔ این معادله است. گویند، z ریشهٔ هفتم واحد است.

به سادگی می‌توان متوجه شد که تقسیم دایره به n بخش برابر، منجر به تعیین ریشه‌های معادلهٔ $z^{n} - 1 = 0$ می‌شود. به‌همین مناسبت، معادله‌ای از این نوع را، معادلهٔ تقسیم محیط دایره هم می‌نامند.

محیط دایره را وقتی، وتنها وقتی، می‌توان (به کمك پرگاروخط کش) به n بخش‌برابرتقسیم کرد که‌ریشه‌های معادلهٔ $z^{n} - 1 = 0$ قابل بیان‌برحسب رادیکال‌های با فرجهٔ ۲ باشند.

۴۰ §. ریشه‌های واحد

۱. دیدیم که تقسیم محیط دایره به n بخش برابر، به‌حل معادلهٔ $x^{n} - 1 = 0$ بستگی دارد. اکنون به‌حل این معادله می‌پردازیم.

از معادله، نتیجه می‌شود:

$$x=\sqrt[n]{1}=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

که باید r و φ را، در آن، معین کنیم. اگر دوطرف را به‌توان n برسانیم، به‌دست می‌آید:

$$1=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

و ازآن‌جا نتیجه می‌شود:

$$r^n\cos n\varphi=1 \quad , \quad r^n\sin n\varphi=0$$

بنابراین

$$r=\sqrt{1}=1$$

زیرا r باید عددی مثبت باشد و ۱، تنها عدد مثبتی است که توان n ام آن برابر ۱ می‌شود. برای تعیین φ، معادله‌های زیر را داریم:

$$\cos n\varphi=1 \quad , \quad \sin n\varphi=0$$

که ازآن‌جا به‌دست می‌آید:

$$n\varphi=0,\ 2\pi,\ 4\pi,\dots,\ 2k\pi,\dots$$

$$\varphi=0,\ \frac{2\pi}{n},\ \frac{4\pi}{n},\dots,\ \frac{2k\pi}{n},\dots$$

وبه‌این ترتیب، ریشه‌های معادله به صورتی غیر جبری به‌دست می‌آیند. هر ریشه ازمعادلهٔ $x^n-1=0$ به‌این صورت است:

$$\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

اگر دراین عبارت $k=n$ بگیریم، به‌همان عددی می‌رسیم که به‌ازای $k=0$ به‌دست می‌آید (یعنی به‌ریشهٔ ۱). به‌ازای $k=n+m$ (که درآن $m>n$)، به همان ریشه‌ای از معادله دست پیدا می‌کنیم که به‌ازای $k=m$ به‌دست

آورده‌ایم.

ازاین‌جا نتیجه می‌شود که، تنها به‌ازای $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$، مقدارهای مختلف به‌دست می‌آید. به این ترتیب، می‌توان گفت: معادلهٔ $x^n - 1 = 0$ دارای n ریشه است (ریشه‌های n ام واحد) که به‌این صورت هستند:

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \quad (k=0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

اگر فرض کنیم $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$، آن وقت

$$\varepsilon^k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

بنابراین، ریشه‌های n ام واحد، عبارتند از

$$1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^{n-1}$$

این ریشه‌ها، یعنی ریشه‌های n ام واحد، همان‌طور که ازنمایش آن‌ها برمی‌آید، بایکدیگراختلاف‌دارند. درواقع این‌ریشه‌ها، متناظرند باراس‌های یك n ضلعی منتظم محاط دردایرهٔ به‌شعاع ۱؛ ضمناً، نقطهٔ متناظر با عدد ۱، یکی از راس‌های این n ضلعی منتظم است.

چون $\varepsilon^n = 1$، بنابراین

$$\varepsilon^{n-k} = \varepsilon^{-k} = \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

و ازهمین رابطه است که استفاده خواهیم کرد.

۲. تعریف جبری ریشه‌های واحد.

دیدیم که رسم یك n ضلعی منتظم، منجر به تعیین ریشه‌های n ام واحد می‌شود، یعنی عددی مثل ε که درمعادلهٔ $x^n - 1 = 0$ صدق کند. ولی

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)$$

ازاین‌جا معلوم می‌شود که عدد ۱، همیشه ریشه‌ای ازمعادلهٔ $x^n - 1 = 0$

است و هر ریشهٔ دیگر آن، ε، باید درمعادلهٔ زیرصدق کند:

$$\varepsilon+\varepsilon^{2}+\varepsilon^{3}+\ldots+\varepsilon^{n-1}=-1$$

رسم یك n ضلعی منتظم، وقتی وتنها وقتی ممکن است که ریشه‌های این معادله را بتوان برحسب رادیکال‌های بافرجهٔ ۲ بیان کرد.

§ ۴۱. رسم پنج‌ضلعی و ده‌ضلعی منتظم

۱. رسم پنج ضلعی منتظم، بستگی به ریشه‌های پنجم واحد دارد، ریشه‌هایی که باید درمعادلهٔ زیرصدق کنند:

$$\varepsilon^{4}+\varepsilon^{3}+\varepsilon^{2}+\varepsilon=-1 \qquad (1)$$

چون $\varepsilon^{5}=1$، بنابراین $\varepsilon^{4}=\varepsilon^{-1}$ و $\varepsilon^{3}=\varepsilon^{-2}$، ومعادلهٔ (۱) رامی‌توان چنین نوشت:

$$\varepsilon+\varepsilon^{-1}+\varepsilon^{2}+\varepsilon^{-2}=-1 \qquad (2)$$

واین معادله، به‌کمك ریشه‌های دوم قابل حل است.

اگر فرض کنیم $\varepsilon+\varepsilon^{-1}=y$ (۳)، به دست می‌آید: $\varepsilon^{2}+\varepsilon^{-2}=y^{2}-2$ و، برای y، به‌این معادله می‌رسیم:

$$y^{2}+y-1=0 \qquad (4)$$

که ریشه‌های آن چنین‌اند:

$$y_{1}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5},\quad y_{2}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

واگر y_1 را در معادلهٔ (۳) قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$\varepsilon=\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$$

مساله، به‌طریق جبری، حل شد.

۲. قبل‌ازهرکار، مقدارهندسی y_1 را موردبررسی قرارمی‌دهیم. می‌دانیم

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$$

و چون

$$\varepsilon^{-1} = \cos\frac{2\pi}{5} - i\cos\frac{2\pi}{2}$$

بنابراین

$$y_1 = \varepsilon + \varepsilon^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{5} = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right) = 2\sin\frac{\pi}{10} = c_{10}$$

معادلهٔ (۴) دو ریشه دارد، یکی مثبت و دیگری منفی. بنابراین، ریشهٔ مثبت آن، برابر است با طول ضلع ده‌ضلعی منتظم محاطی. به‌کمك ده‌ضلعی منتظم، می‌توان به‌سادگی، پنج‌ضلعی را رسم کرد.

ولی براساس رابطهٔ زیر هم می‌توان c_5 را محاسبه کرد (§ ۳۸،۲):

$$2 - \sqrt{4 - c_5^2} = c_{10}^2$$

که ازآن‌جا، به‌رابطهٔ معلوم زیر می‌رسیم:

$$c_5^2 = \frac{1}{4}(10 - 2\sqrt{5}) = 1 + c_{10}^2$$

۳. برای رسم ده‌ضلعی منتظم، و همراه با آن، پنج‌ضلعی منتظم، باید معادلهٔ زیر را به‌طریق هندسی حل کنیم:

$$y^2 + y - 1 = 0 \qquad (4)$$

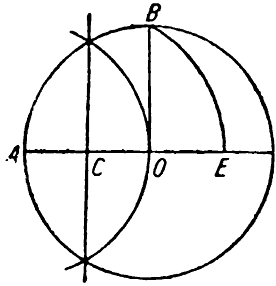
این راه‌حل را، بااستفاده ازوسیله‌های مختلف رسم، می‌آوریم.

a) حل معادلهٔ (۴) به‌کمك پرگار وخط‌کش. ریشهٔ

$$y = c_{10} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

را می‌سازیم. شعاع دایره برابر است با ۱. دایره‌های $A(O)$ و $C(B)$ را رسم می‌کنیم (شکل ۱۴۲) . پاره‌خط OE برابر ضلع ده ضلعی منتظم و وپاره‌خط BE برابر باضلع پنج‌ضلعی منتظم است.

یادداشت. این ساختمان، ضلع شش‌ضلعی، سه‌ضلعی وچهارضلعی منتظم



شکل ۱۴۲

را هم می‌دهد.

معادلهٔ $y^۲+y-۱=۰$ را به‌صورت

$$y:(۱-y)=۱:y$$

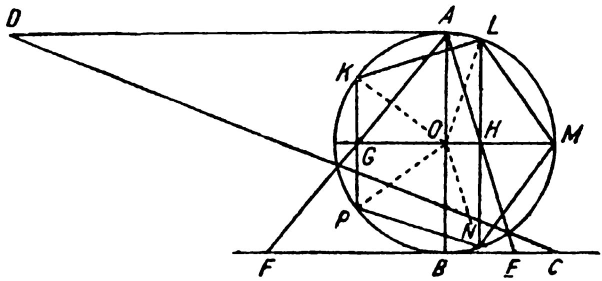
هم می‌توان نوشت، یعنی y بخش بزرگتر شعاع است ، به‌شرطی که به‌نسبت ذات وسط وطرفین تقسیم شده‌باشد (تقسیم طلایی).

b) رسم پنج‌ضلعی منتظم ، از راه رسم خط‌های راست و به‌کمک دایرهٔ کمکی شتینر. برای این منظور، باید معادلهٔ $y^۲+y-۱=۰$ را ، با روش § ۳۲، حل کنیم.

دراین‌حالت داریم: $p=۱$ و $q=-۱$. بنابراین، روی‌مماس‌های درنقطه‌های A و B، پاره‌خط‌های ۱+ و ۴− را جدا می‌کنیم (شکل ۱۴۳ ا). اگر نقطه‌هایی راکه ازاین طریق به‌دست می‌آیند به‌هم وصل و نقطهٔ برخورد خط راستی که به‌دست می‌آید با دایره را، از نقطهٔ A برمماس پایینی تصویر کنیم، ریشهٔ‌مجهول‌معادله درروی آن به‌دست می‌آید. به‌این‌ترتیب(شکل ۱۴۳ ا)، پاره‌خط BE برابر $y_۱=c_{۱۰}$ و ضلع پنج‌ضلعی منتظم برابر پاره‌خط EO خواهد بود. مسأله حل شد.

فون شتاوت ($Von\ Staudt$) هم، راه حل زیبایی برای پیداکردن رأس‌های‌پنج‌ضلعی‌منتظم، به‌کمک‌نقطه‌های G و H به‌دست‌می‌دهد(شکل ۱۴۳ ا)، ضمناً $OM \perp AB$.

درهمین‌جا، § ۴۱، ۲، ثابت کردیم که $c_{۱۰}=۲\cos\frac{۲\pi}{۵}$، به‌نحوی که



شکل۱۴۳

$$\overline{OH}=\frac{\overline{EB}}{۲}=\frac{۱}{۲}c_{۱۰}=cos\frac{۲\pi}{۵}$$

بنا بر این

$$\widehat{LOM}=\widehat{MON}=\frac{۲\pi}{۵}$$

با استدلال مشابهی معلوم می‌شود که $\overline{OG}=cos\frac{\pi}{۵}$، بنا بر این $\widehat{POG}=\frac{\pi}{۵}$.

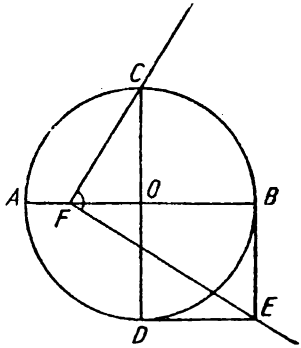
c) رسم پنج‌ضلعی منتظم را ، بـا استفادهٔ از یك پـرگار ، در § ۱۵ داده‌ایم.

d) رسم پنج‌ضلعی منتظم به‌کمك خط‌کشی با دو لبهٔ موازی به‌سادگی انجام می‌شود. خودتان آن‌را پیدا کنید.

e) رسم پنج‌ضلعی منتظم، به‌کمك زاویهٔ قائمهٔ متحرك، باروش‌ساده‌ای انجام می‌شود.

برای این‌منظور، باید معادلهٔ $y^۲+y-۱=۰$ را، منحصراً به‌کمك یك زاویهٔ قـائمه حل کنیم؛ و این عمل را می‌توانیم با روشی که در§ ۳۲ نشان دادیم، به‌پایان برسانیم.

رسم به‌طریق زیر انجام می‌گیرد. دو قطر عمود برهم AB و CD را در دایره‌ای‌که می‌خواهیم پنج ضلعی یا ده‌ضلعی منتظم را در آن محاط‌کنیم، می‌کشیم (شکل ۱۴۴) و نقطهٔ E را طوری پیدا می‌کنیم‌که داشته بـاشیم: $EB\perp OB$ و $ED\perp OD$. اکنون اگر زاویهٔ قـائمه را روی صفحهٔ شکل



شکل ۱۴۴

طوری قرار دهیم که ضلع‌های آن از نقطه‌های C و E بگذرند و رأس آن برخط راست AB واقع باشد، خواهیم داشت: $OF = c_{10}$ و $FC = c_5$.

§۴۲. هفت‌ضلعی و نه‌ضلعی منتظم

۱. هفت‌ضلعی منتظم

تقسیم محیط دایره به‌هفت بخش برابر، منجر به‌حل معادلهٔ زیر می‌شود.

$$\varepsilon+\varepsilon^{2}+\varepsilon^{3}+\varepsilon^{4}+\varepsilon^{5}+\varepsilon^{6}=-1$$

چون $\varepsilon^{7}=1$ ، پس $\varepsilon^{6}=\varepsilon^{-1}$، $\varepsilon^{5}=\varepsilon^{-2}$، $\varepsilon^{4}=\varepsilon^{-3}$ ، بنابراین، معادلهٔ مفروض به‌این صورت درمی‌آید:

$$\varepsilon+\varepsilon^{-1}+\varepsilon^{2}+\varepsilon^{-2}+\varepsilon^{3}+\varepsilon^{-3}=-1$$

اگر برای حل این معادله فرض کنیم $y=\varepsilon+\varepsilon^{-1}$، به‌دست می‌آید:

$$\varepsilon^{2}+\varepsilon^{-2}=y^{2}-2 \quad \text{و} \quad \varepsilon^{3}+\varepsilon^{-3}=y^{3}-3y$$

و برای تعیین y ، به‌معادلهٔ درجه سوم زیر می‌رسیم:

$$y^{3}+y^{2}-2y-1=0$$

به‌این ترتیب، رسم هفت ضلعی منتظم، به حل این معادلهٔ درجه سوم بستگی دارد و ، در نتیجه، هفت ضلعی منتظم را نمی‌توان بـه‌کمك پرگار و

خط‌کش رسم کرد.

مفهوم هندسی y را هم بررسی می‌کنیم:

$$y=\varepsilon+\varepsilon^{-۱}=\left(\cos\frac{۲\pi}{۷}+i\ \sin\frac{۲\pi}{۷}\right)+\left(\cos\frac{۲\pi}{۷}-i\sin\frac{۲\pi}{۷}\right)=$$

$$=۲\cos\frac{۲\pi}{۷}$$

یعنی اگر دو رأس هفت ضلعی را، که یك رأس هفت ضلعی در وسط آن‌ها قرار دارد، به‌هم وصل کنیم، وتری از دایره به‌دست می‌آید که فاصلهٔ مرکز دایره از آن برابر است با $\frac{y}{۲}=\cos\frac{۲\pi}{۷}$.

۲. نه‌ضلعی منتظم

مسألهٔ رسم نه ضلعی منتظم را بـه ترتیب دیگری می‌توان طرح کرد؛ بـرای رسم این چند ضلعی می‌توان ابتدا محیط دایره را به سه‌بخش برابر تقسیم و، سپس، هربخش آن‌را دوباره به‌سه‌بخش برابر تقسیم کرد.

بنابراین، اگر ε ریشهٔ نهم واحد بـاشد، $\varepsilon^۳$ ریشهٔ سوم واحد خواهد بود. برای ریشهٔ نهم واحد، این برابری به‌دست می‌آید:

$$(\varepsilon^۳)^۲+\varepsilon^۳+۱=۰ \Rightarrow \varepsilon^۶+\varepsilon^۳+۱=۰ \qquad (۱)$$

ولی چـون $\varepsilon^۹=۱$، پس $\varepsilon^۶=\varepsilon^{-۳}$ و، در نتیجه، معادلهٔ اخیر چنین می‌شود:

$$\varepsilon^۳+\varepsilon^{-۳}+۱=۰ \qquad (۲)$$

که اگر فرض‌کنیم $y=\varepsilon+\varepsilon^{-۱}$، آن‌وقت $\varepsilon^۳+\varepsilon^{-۳}=y^۳-۳y$ و برای y به‌معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$y^۳-۳y+۱=۰ \qquad (۳)$$

این معادله، بنـابر §۳۶، قابل حل به وسیلهٔ ریشه‌های دوم نیست. بنابراین، رسم نه‌ضلعی منتظم را نمی‌توان به‌وسیلهٔ پرگار و خط‌کش انجام داد.

معادلهٔ (۳) دارای این ریشه‌هاست:

$$y_{۱}=\varepsilon+\varepsilon^{-۱}=\left(\cos\frac{۲\pi}{۹}+i\sin\frac{۲\pi}{۹}\right)+\left(\cos\frac{۲\pi}{۹}-i\sin\frac{۲\pi}{۹}\right)=$$

$$=۲\cos\frac{۲\pi}{۹},$$

$$y_{۲}=\varepsilon^{۲}+\varepsilon^{-۲}=\left(\cos\frac{۴\pi}{۹}+i\sin\frac{۴\pi}{۹}\right)+\left(\cos\frac{۴\pi}{۹}-i\sin\frac{۴\pi}{۹}\right)=$$

$$=۲\cos\frac{۴\pi}{۹},$$

$$y_{۳}=\varepsilon^{۴}+\varepsilon^{-۴}=\left(\cos\frac{۸\pi}{۹}+i\sin\frac{۸\pi}{۹}\right)+\left(\cos\frac{۸\pi}{۹}-i\sin\frac{۸\pi}{۹}\right)=$$

$$=۲\cos\frac{۸\pi}{۹}=-۲\cos\frac{\pi}{۹}$$

به‌این ترتیب معادلهٔ (۳) سه جـواب حقیقی دارد: دو جواب مثبت و یك جواب منفی؛ در ضمن $y_{۱}$ بزرگترین ریشهٔ مثبت معادله است.

ریشه‌های $y_{۱}$ و $y_{۲}$ مفهومی هندسی دارندکـه ، برای رسم نه ضلعی منتظم، می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند:

$$\frac{y_{۱}}{۲}=\cos\frac{۲\pi}{۹}$$

برابر است بـا فاصلهٔ مرکز دایره از وتری‌که دو رأس مجاور به‌رأس سوم نه‌ضلعی را به‌هم وصل‌کرده باشد. و

$$y_{۲}=۲\cos\frac{۴\pi}{۹}=۲\sin\left(\frac{\pi}{۲}-\frac{۴\pi}{۹}\right)=۲\sin\frac{\pi}{۱۸}$$

برابر است با طول ضلع ۱۸ ضلعی منتظم.

§۴۳. رسم هفده‌ضلعی منتظم

۱. گوس (*Gouss*) ثابت‌کردکه هفده‌ضلعی منتظم‌را می‌توان به‌کمك پرگار و خط‌کش رسم‌کرد.

این مسأله، منجر به‌حل معادلهٔ

$$x^{17}-1=0$$

می‌شود و می‌توان ثابت کرد که، این معادله، به‌کمك ریشه‌های دوم قابل‌حل است. اگر فرض کنیم:

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{17}+i\sin\frac{2\pi}{17}$$

آن‌وقت، ریشه‌های هفدهم واحد عبارتند از : ۱؛ ε، ε^{2}، . . . ، ε^{16} و یا : ۱، ε، ε^{2}، ε^{3}، . . . ، ε^{8}، ε^{-8}، ε^{-7}، . . . ، ε^{-1}، زیرا $\varepsilon^{17-k}=\varepsilon^{-k}$.

معادله‌ای که باید ریشه‌های هفدهم واحد را از آن به‌دست آورد، چنین است:

$$(1)\quad \varepsilon+\varepsilon^{2}+\varepsilon^{3}+\ldots+\varepsilon^{8}+\varepsilon^{-8}+\varepsilon^{-7}+\ldots+\varepsilon^{-1}=-1$$

۲. به‌قصد حل این معادله، فرض می‌کنیم:

$$(2)\quad \begin{cases}\varepsilon+\varepsilon^{2}+\varepsilon^{4}+\varepsilon^{8}+\varepsilon^{-1}+\varepsilon^{-2}+\varepsilon^{-4}+\varepsilon^{-8}=\eta\\ \varepsilon^{3}+\varepsilon^{6}+\varepsilon^{-5}+\varepsilon^{7}+\varepsilon^{-3}+\varepsilon^{-6}+\varepsilon^{5}+\varepsilon^{-7}=\eta_{1}\end{cases}$$

دو برابری، روی هم، شامل همهٔ ریشه‌های مختلط هفدهم، از واحد هستند. سمت چپ برابری‌ها از این قانون پیروی می‌کنند که، در آن‌ها، هرجمله برابر است با مجذور جملهٔ قبل از خود.

اگر سمت چپ دو برابری را با هم جمع کنیم، باید عدد ۱ــ به‌دست آید [رابطهٔ (۱) را ببینید]، یعنی

$$\eta+\eta_{1}=-1$$

همچنین به‌سادگی و به کمك محاسبه می‌توان روشن کرد که، اگرسمت چپ دو برابری را درهم ضرب کنیم، از هر توان ε، چهار مرتبه به‌دست می‌آید و در نتیجه، با توجه به‌برابری (۱):

$$\eta\cdot\eta_{1}=-4$$

بنابراین، η و η_1 ریشه‌های معادلهٔ زیر هستند:

$$x^2+x-4=0 \qquad (3)$$

که ازآن‌جا به‌دست می‌آید: $\eta=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{17}$ و $\eta_1=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{17}$.

اکنون فرض می‌کنیم:

$$\begin{cases} \varepsilon+\varepsilon^4+\varepsilon^{-1}+\varepsilon^{-4}=z \\ \varepsilon^2+\varepsilon^8+\varepsilon^{-2}+\varepsilon^{-8}=z_1 \\ \varepsilon^3+\varepsilon^{-5}+\varepsilon^{-3}+\varepsilon^5=z_2 \\ \varepsilon^6+\varepsilon^7+\varepsilon^{-6}+\varepsilon^{-7}=z_3 \end{cases} \qquad (4)$$

این چهار برابری، بازهم روی‌هم، شامل همهٔ ریشه‌های مختلط هفدهم واحد هستند. در ضمن توجه می‌کنیم که، در هرکدام از برابری‌ها ، هرجمله برابر توان چهارم جملهٔ قبل از آن است.

از جمع و ضرب دو رابطهٔ اول دستگاه (۴) به‌دست می‌آید:

$$z+z_1=\eta \text{ و } z\cdot z_1=-1$$

به‌نحوی که z و z_1 ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم زیرند:

$$x^2-\eta x-1=0 \qquad (5)$$

از دو رابطهٔ آخر دستگاه (۴)، نتیجه می‌شود:

$$z_2+z_3=\eta_1 \text{ و } z_2\cdot z_3=-1$$

بنابراین z_2 و z_3 ریشه‌های این معادلهٔ درجه دوم‌اند:

$$x^2-\eta_1 x-1=0 \qquad (6)$$

بالاخره فرض می‌کنیم:

$$
\begin{cases} \varepsilon+\varepsilon^{-۱}=y \\ \varepsilon^{۴}+\varepsilon^{-۴}=y_۱ \end{cases} \qquad (۷)
$$

و از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$y+y_۱=z \quad \text{و} \quad y\cdot y_۱=z_۲$$

که در آن‌ها ، z ریشهٔ مثبت معادلهٔ (۵) و $z_۲$ ریشهٔ مثبت معادلهٔ (۶) است. بنابراین، y و $y_۱$، ریشه‌های معادلهٔ زیر هستند:

$$x^۲-zx+z_۲=۰ \qquad (۸)$$

(y بزرگتر از $y_۱$ است).

اکنون، اگر مقدار y را درمعادلهٔ $\varepsilon+\varepsilon^{-۱}=y$ قرار دهیم،معادله‌ای به‌دست می‌آیدکه ازآن می‌توان مقدار ε را محاسبه‌کرد:

$$\varepsilon=\frac{y}{۲}\pm\frac{۱}{۲}\sqrt{y^۲-۴}$$

واین، ثابت می‌کندکه ریشه‌های‌هفدهم واحدرا می‌توان برحسب‌رادیکال‌های با فرجهٔ ۲ بیان‌کرد.

مفهوم هندسی $y_۱$، ریشهٔ کوچکتر معادلهٔ (۸) را هم روشن می‌کنیم:

$$y_۱=\varepsilon^۴+\varepsilon^{-۴}=\left(\cos\frac{۸\pi}{۱۷}+i\sin\frac{۸\pi}{۱۷}\right)+\left(\cos\frac{۸\pi}{۱۷}-i\sin\frac{۸\pi}{۱۷}\right)=$$

$$=۲\cos\frac{۸\pi}{۱۷}=۲\sin\left(\frac{\pi}{۲}-\frac{۸\pi}{۱۷}\right)=۲\sin\frac{\pi}{۳۴}$$

یعنی $y_۱$ عبارت است ازضلع ۳۴ ضلعی منتظم محاطی.

۳. رسم هفده ضلعی منتظم.

a) برای این منظور، معادله‌های درجه دوم زیر را، به ترتیب با رسم حل می‌کنیم:

$$
(S)\quad\begin{cases}
x^2+x-4=0 \Rightarrow \eta , \eta_1 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{17} \\
(\eta>0 , \eta_1<0) \\
x^2-\eta x-1=0 \Rightarrow z , z_1 = \frac{\eta}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\eta^2+4} \\
(z>0 , z_1<0) \\
x^2-\eta_1 x-1=0 \Rightarrow z_2 , z_3 = \frac{\eta_1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\eta_1^2+4} \\
(z_2>0 , z_3<0) \\
x^2-zx+z_2=0 \Rightarrow y , y_1 = \frac{z}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{z^2-4z_2} \\
(y>y_1)
\end{cases}
$$

y_1، ضلع ۳۴ ضلعی منتظم است. بعد $y=\varepsilon+\varepsilon^{-1}=2\cos\frac{2\pi}{17}$ و، بنابراین، $\cos\frac{2\pi}{2}=\frac{y}{2}$، که عبارت است از فاصلهٔ مرکز دایره تا وتری که دو راس مجاور به‌یکی از راس‌های ۱۷ ضلعی منتظم را به‌هم وصل کرده است.

حل این ردیف معادله‌های درجه دوم را، به چهار طریق مختلف، می‌توان انجام داد: A) با استفادهٔ بدون قید از پرگار و خط‌کش (روش سه‌ره باخمان، شوبرت)*؛ B) به وسیلهٔ رسم خط‌های راست ودایرهٔ کمکی شتینر (روش شتاوت)**؛ C) تنها به‌وسیلهٔ پرگار (روش ژرارد)***؛ D) به‌کمک زاویهٔ قائمه.

A) رسم هفده‌ضلعی منتظم به‌کمک پرگار و خط‌کش.

۱. ریشه‌های دستگاه (S) را، به ردیف، می‌سازیم. برای این منظور،

---

*) *Serret – Bachmann, H. Schubert.*

) *Staudt.* *) *Gérard.*

مثلث قائم‌الزاویه‌ای باضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمهٔ برابر ۲ و $\frac{۱}{۲}$ رسم

می‌کنیم؛ وتر این مثلث برابر با $\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۷}$ می‌شود.

اگر به‌مرکز محل برخورد ضلع به‌طول $\frac{۱}{۲}$ با وتر، نیم‌دایره‌ای به‌شعاع

$\frac{۱}{۲}$ رسم کنیم، روی وتر مقدارهای η و $\eta_۱$ به‌دست می‌آید؛ در ضمن، مقدار $\eta_۱$ را باید با علامت منفی به‌حساب آورد.

سپس، مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم که ضلع‌های مجاور به‌زاویهٔ قائمه‌آن برابر $\frac{\eta}{۲}$ (یا $\frac{\eta_۱}{۲}$) و واحد باشد، ونیم‌دایره‌ای به‌شعاع $\frac{\eta}{۲}$ (یا $\frac{\eta_۱}{۲}$) رسم می‌کنیم تا روی وتر مثلث، ریشه‌های z و $z_۱$ (یا $z_۲$ و $z_۳$) به‌دست آید؛ در ضمن، پاره‌خط $z_۱$ (یا $z_۳$) را باید با علامت منفی به‌حساب آورد.

سرانجام، اگر مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ضلع‌های مجاور به‌زاویهٔ قائمه $\frac{z}{۲}$ و $z_۲$ بسازیم، مقدارهای مجهول y و $y_۱$ به‌دست می‌آیند.

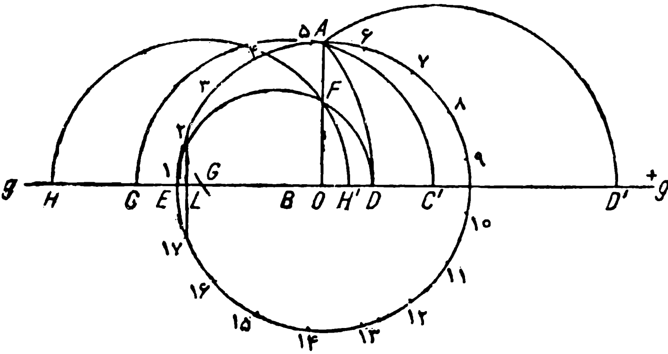
اکنون اگر در دایرهٔ به‌شعاع ۱، پاره خط $\frac{y}{۲}$ را ازمرکزرسم وعمودی برانتهای آن اخراج کنیم، این عمود دایره را در دو نقطه قطع می‌کند که، در واقع، دو رأس مجاور به‌یکی از رأس‌های ۱۷ ضلعی منتظم‌اند.

به‌این ترتیب، برای حل مسأله باید چهار مثلث قائم‌الزاویه رسم‌کرد.

و این، روش حل سه‌ره ــ باخمان است.

۲. $\overline{OA}=۱$ را شعاع دایره‌ای می‌گیریم که می‌خواهیم محیط آن را به ۱۷ بخش برابر تقسیم‌کنیم (شکل ۱۴۵). خط راست g را بر OA عمود و، روی آن، جهت مثبت را انتخاب می‌کنیم.

$\overline{OB}=-\frac{۱}{۴}$ را می‌سازیم. در این صورت: $\overline{BA}=\frac{۱}{۴}\sqrt{۱۷}$. بعد دایره‌های $B(A)$، $C(A)$ و $C'(A)$ را رسم می‌کنیم. در این صورت،



شکل ۱۴۵

رابطه‌های زیر را خواهیم داشت:

$$\overline{OC}=\overline{OB}+\overline{BC}=-\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۴}\sqrt{۱۷}=\frac{\eta_۱}{۲},$$

$$\overline{OC'}=\overline{OB}+\overline{BC'}=-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}\sqrt{۱۷}=\frac{\eta}{۲},$$

$$\overline{OD'}=\overline{OC'}+\overline{C'D'}=\frac{\eta}{۲}+\sqrt{\left(\frac{\eta}{۲}\right)^۲+۱}=z,$$

$$\overline{OD}=\overline{OC}+\overline{CD}=\frac{\eta_۱}{۲}+\sqrt{\left(\frac{\eta_۱}{۲}\right)^۲+۱}=z_۲$$

سپس، $\overline{OE}=-۱$ را جدا و دایره‌ای به‌قطر ED رسم و جدا می‌کنیم:

$$\overline{FG}=\frac{۱}{۲}\overline{OD'}$$

اگر دایرهٔ $G(F)$ را رسم کنیم، نقطه‌های H و H' به‌دست می‌آید؛ در ضمن

$$-\overline{OH}+\overline{OH'}=\overline{HH'}=۲\overline{GH'}=\overline{OD'}=z,$$

$$-\overline{OH}\cdot\overline{OH'}=\overline{OF}^۲=-\overline{OE}\cdot\overline{OD}=z_۲,$$

زیرا $1=\overline{OE}-$.

بنابراین، مجموع پاره‌خطهای $\overline{OH}-$ و $\overline{OH'}$ برابر با z و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر z_2 است. یعنی، این پاره‌خطها، همان y و y_1، ریشه‌های معادلهٔ $x^2-zx+z_2=0$ هستند. در ضمن $y=\overline{HO}$ و $y_1=\overline{OH'}$.

بنابر آن‌چه قبلاً گفتیم

$$\frac{y}{2}=\cos\frac{2\pi}{17}=\frac{1}{2}\overline{HO}$$

و OH' برابر است با ضلع ۳۴ضلعی منتظم.

بالاخره $\overline{OL}=\frac{1}{2}\overline{OH}$ را می‌سازیم و از L عمودی بر OH رسم می‌کنیم. این عمود، دایره را در رأس‌های ۲ و ۱۷ از هفده ضلعی منتظم قطع می‌کند.

۳. شوبرت در کتاب خود، راه حل سادهٔ دیگری هم برای رسم ۱۷ ضلعی منتظم می‌دهد. در این راه حل ، بازهم برای حل دستگاه (S) از مثلث‌های قائم‌الزاویه استفاده می‌شود، منتهی موقعیت آن‌ها نسبت به‌یکدیگر، ساده‌تر و مناسب‌تر است.

B) رسم هفده ضلعی منتظم با روش شتاوت.

۱. می‌خواهیم هفده ضلعی منتظم‌را به‌کمك خطهای راست ویك‌دایرهٔ کمکی رسم کنیم.

دایرهٔ‌کمکی را می‌توانیم همان دایره‌ای بگیریم که باید محیط آن‌را به ۱۷ بخش برابر تقسیم کنیم.

حل این مسأله را می‌توان با حل نموداری معادله‌های دستگاه (S)، به‌یاری وسیله‌های محدود خود، انجام داد.

در §۳۲، ثابت کردیم که می‌توانیم ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم را، تنها با رسم خطهای راست، پیداکنیم، به‌شرطی‌که یك دایرهٔ ثابت درصفحهٔ شکل داده شده باشد.

در حـالت مفروض هم، از همین روش استفاده می‌کنیـم. ولی برای این‌که ، در جریـان استدلال، بحث مـا قطع نشود، ابتدا دو پیش قضیه را ثابت می‌کنیم؛ این دو پیش قضیه، در بحث ما، اهمیت دارند.

پیش‌قضیه ۱. AB را قطر و C را نقطهٔ دلخواهی از محیط دایرهٔ K به شعاع ۱ می‌گیریم (شکل ۱۴۶). مثلث‌هـای EAB و ABD متشابهند، به‌نحوی که

$$\overline{AE} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{BD}$$

و بنابراین
$$\overline{AE} \cdot \overline{BD} = ۴$$

پیش‌قضیهٔ ۲. EF و GH را دو خط راست دلخواهی می‌گیریم که خط راست AB را در نقطهٔ P قطع می‌کنند (شکل ۱۴۶). در این صورت

$$\overline{AE} : \overline{BF} = \overline{AP} : \overline{BP} = \overline{AH} : \overline{BG}$$

و بنابراین
$$\overline{AE} \cdot \overline{BG} = \overline{BF} \cdot \overline{AH}$$

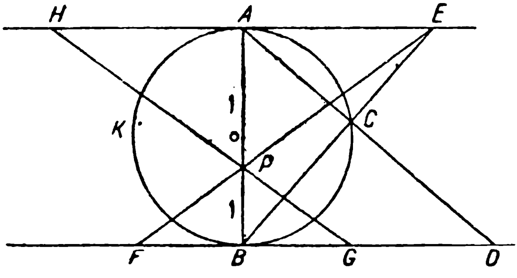
چه از نظر قدر مطلق و چه از نظر علامت.

۲. قبل از همه، باید این معادله را حل کرد:

$$x^۲ + x - ۴ = ۰$$

این معادله را با معادلهٔ

$$x^۲ - px + q = ۰$$



شکل ۱۴۶

که در شکل ۱۳۷ حل کرده بودیم، مقایسه می‌کنیم و توجه می‌کنیم که درحالت ما داریم:

$$p=-۱,\quad q=-۴$$

بنا براین، روی مماس‌های در A و B (شکل ۱۴۷)، پاره‌خطهای

$$\frac{۴}{p}=-۴ \text{ و } \frac{q}{p}=+۴$$

را جدا و نقطه‌های حاصل را به‌هم وصل می‌کنیم؛ نقطهٔ برخورد این خط راست با دایره را از نقطهٔ A برمماس $t_۲$ تصویرمی کنیم که، درنتیجه ریشه‌های η و $\eta_۱$ به‌دست می‌آید.

اکنون باید این معادله را حل کنیم:

$$x^۲-\eta x-۱=۰$$

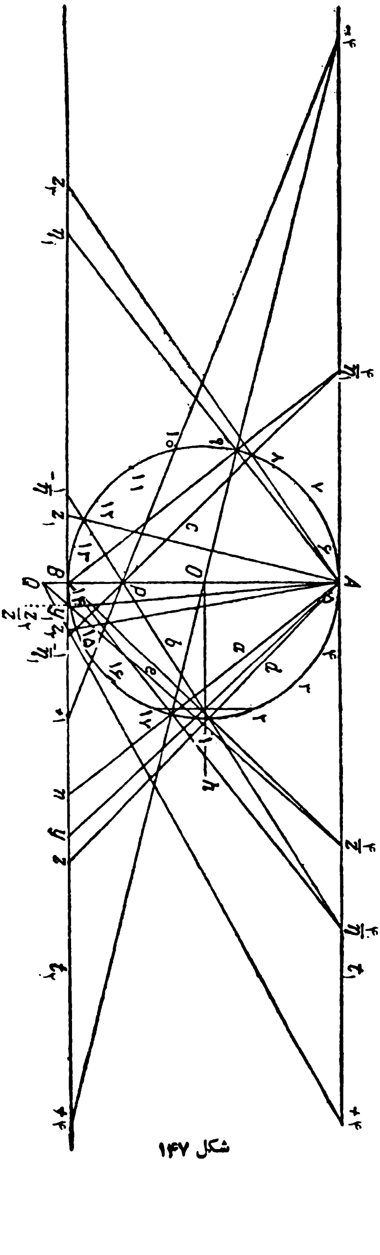
که برای آن داریم:

$$p=\eta \text{ و } q=-۱$$

حالا از نقطه‌های A و B و روی $t_۱$ و $t_۲$، به‌ترتیب، پاره‌خطهای

$$\frac{۴}{p}=\frac{۴}{\eta} \text{ و } \frac{q}{p}=-\frac{۱}{\eta}$$

را جدا می‌کنیم. جداکردن این دو پاره‌خط به کمک پیش قضیه‌ها (شکل ۱۴۶)، به‌سادگی انجام می‌شود.



شکل ۱۴۷

اگر نقطهٔ برخورد خط راست a با دایرهٔ K را، از B بر t_1 تصویر کنیم، روی t_1، پاره خط راست $\frac{4}{\eta}$ به‌دست می‌آید (بنا بر پیش قضیهٔ ۱).

اگر نقطه‌های ۱+ و ۴− را به‌هم وصل کنیم و، سپس، نقطهٔ P از خط راست AB را که به‌این طریق به‌دست می‌آید، به‌نقطهٔ $\frac{4}{\eta}$ روی t_1 (که قبلاً به‌دست آورده بودیم) بپیوندیم، بنا بر پیش قضیهٔ دوم، پاره‌خط $-\frac{1}{\eta}$ را روی t_2 جدا می‌کند. ولی اکنون

$$\frac{4}{\eta}=\frac{4}{p} \text{ و } -\frac{1}{\eta}=\frac{q}{p}$$

بنابراین، اگر نقطه‌های برخورد خط راست b و دایرهٔ K را از A بر t_2 تصویر کنیم (شکل ۱۴۷)، نقطه‌های z و z_1 به‌دست می‌آید.

اکنون، برای این‌که معادلهٔ

$$x^2-\eta_1 x-1=0$$

را حل کنیم، پاره‌خط‌های $\frac{4}{\eta_1}=\frac{4}{p}$ و $-\frac{1}{\eta_1}=\frac{q}{p}$ را جدا می‌کنیم. این‌عمل کاملاً شبیه حل معادلهٔ قبلی انجام می‌گیرد.

اکنون اگر نقطه‌های برخورد خط راست c بادایرهٔ K را از A بر t_2 تصویر کنیم (شکل ۱۴۷)، ریشه‌های z_2 و z_3 به‌دست می‌آید.

هنوز باید معادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$x^2-zx+z_2=0$$

که برای آن داریم: $p=z$ و $q=z_2$. بنابراین بایدروی t_1 و t_2، به‌ترتیب پاره‌خط‌های $\frac{4}{z}$ و $\frac{z_2}{z}$ را جداکنیم.

برای این منظور، نقطهٔ برخورد خط راست d (شکل ۱۴۷) با دایرهٔ

K را ، از B بر $t_۲$ تصویر می کنیم تا، بنابر پیش‌قضیهٔ اول، پاره‌خط $\frac{۴}{z}$، هم از لحاظ قدرمطلق و هم از نظر علامت، به‌دست آید.

اگر نقطهٔ ۴+ از $t_۱$ را به‌نقطهٔ $z_۲$ از $t_۲$ وصل کنیم و نقطهٔ Q را که به‌این ترتیب روی AB به‌دست می آید به نقطهٔ $\frac{۴}{z}$ از $t_۱$ بپیوندیم، آن‌وقت، این خط راست e ، بنـابر پیش‌قضیهٔ دوم، روی $t_۲$ (در سمت راست B) ، پاره‌خط $\frac{z_۲}{z}$ را جدا می‌کند. (این نتیجه از تناسب پـاره خطهای حـاصل به‌دست می آید، زیــرا تناسب $\frac{z_۲}{z} : z_۲ = \frac{۴}{z} : ۴$ برقرار است.)

ولی اکنون داریم: $\frac{۴}{p}=\frac{۴}{z}$ و $\frac{q}{p}=\frac{z_۲}{z}$. بنـابراین، اگر نقطه‌هـای برخورد خط راست e با دایرهٔ K را از A بر $t_۲$ تصویر کنیم، ریشه‌هـای y و $y_۱$ معادلهٔ آخر به‌دست می آید.

همان‌طور که می‌دانیم، $y_۱$ عبارت است از ضلع ۳۴ ضلعی منتظم، که از روی آن می‌توان ضلع ۱۷ ضلعی منتظم را به‌دست آورد.

به کمك y هم می تـوان ضلع ۱۷ ضلعی منتظم را پیدا کرد. می‌دانیم (§۴۳، ۲) که

$$y = ۲\cos\frac{۲\pi}{۱۷}$$

بنابراین، اگر ازنقطهٔ O، خط راست h را درجهت مثبت $t_۱$ رسم کنیم و آن را ادامه دهیم تـا خط راست Ay را در نقطهٔ L قطع کند، آن وقت، خط راست عمود بر h در نقطهٔ L ، دایرهٔ K را در رأس‌های ۲ و ۱۷ از ۱۷ ضلعی منتظم قطع می کند.

C) رسم هفده ضلعی منتظم، تنها به کمك پرگار.

۱. صحبت برسر حل دستگـاه (S) به کمك این وسیلهٔ محدود (یعنی پرگار) است. در واقع ، بـاید عبـارت‌هـای رادیـکالی زیر را ، به‌کمك پرگار بسازیم:

$$\frac{\eta}{۲}=-\frac{۱}{۴}+\frac{\sqrt{۱۷}}{۴}\ ,\ \frac{\eta_۱}{۲}=-\frac{۱}{۴}-\frac{\sqrt{۱۷}}{۴}\ ,$$

$$z=\frac{\eta}{۲}+\sqrt{\left(\frac{\eta}{۲}\right)^۲+۱}\ ,\quad z_۲=\frac{\eta_۱}{۲}+\sqrt{\left(\frac{\eta_۱}{۲}\right)^۲+۱},$$

$$y=\frac{z}{۲}+\sqrt{\left(\frac{z}{۲}\right)^۲-z_۲}$$

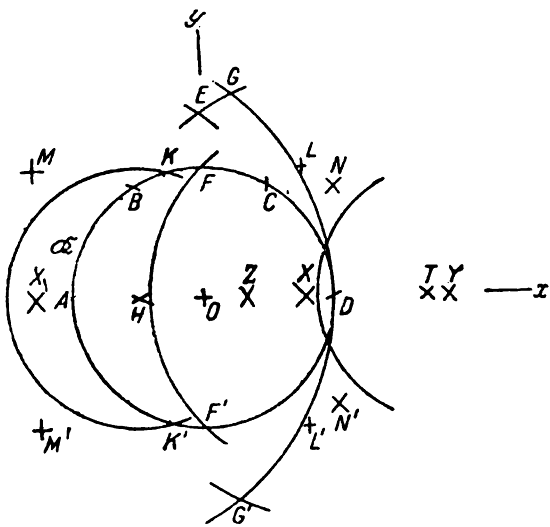
برای‌این‌که این‌عبارت‌ها را به‌کمك پرگار به‌دست‌آوریم، بنابر روش ژرارد و به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

دایرهٔ $\mathscr{R}$ را به‌شعاع واحد در نظر می‌گیریم (شکل ۱۴۸). نقطهٔ دلخواه A را روی دایره انتخاب و پاره‌خط‌های

$$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=۱$$

را جدا و دایره‌های $A(C)$ و $D(B)$ را رسم می‌کنیم. دراین‌صورت، داریم:

$$\overline{OE}=\sqrt{۲}$$



شکل ۱۴۸

اگر دایرهٔ به‌مرکز D و شعاع $\sqrt{۲}$ را رسم کنیم، نقطه‌های F و F' به‌دست می‌آید و دایره‌های $G(D)$ و $G'(D)$ یکدیگر را در نقطهٔ H قطع می‌کنند؛ در ضمن، نقطه‌های G و G' در محل برخورد دایره‌های $A(D)$ و $B(D)$ قرار دارند. در این‌صورت

$$\overline{OH}=\overline{HA}$$

به‌مرکز H و به‌شعاع واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم که دایرهٔ مفروض را در نقطه‌های K و K' قطع کند.

اکنون، یك دستگاه محورهای مختصات قائم را برای تمامی شکل در نظر می‌گیریم (شکل ۱۴۸)؛ مختصات K چنین می‌شود:

$$-\frac{۱}{۴}\,,\ \sqrt{۱-\frac{۱}{۱۶}}$$

اگر دایره‌هایی به‌مرکز K و K' و شعاع $\sqrt{۲}$ رسم کنیم، محور x را در دو نقطه قطع می‌کنند که آن‌ها را X و $X_۱$ می‌نامیم. از مثلث قائم‌الزاویهٔ مربوط معلوم می‌شود که فاصلهٔ نقطهٔ X از خط راست KK' برابر است با $\frac{۱}{۴}\sqrt{۱۷}$. بنابراین داریم:

$$\overline{OX}=\frac{۱}{۴}\sqrt{۱۷}-\frac{۱}{۴}=\frac{\eta}{۲}$$

به‌همین ترتیب، به‌دست می‌آید (از نظر مقدار و علامت):

$$\overline{OX_۱}=\frac{\eta_۱}{۲}$$

اکنون نقطه‌های L و L' را، به طول $\frac{\eta}{۲}$ وعرض ±۱، به کمك پرگار، می‌سازیم؛ به‌جز آن، نقطهٔ Y را طوری می‌سازیم که برای آن داشته باشیم:

$$\overline{LY}=\overline{L'Y}=\overline{XE}$$

دراین صورت

$$\overline{OY}=\frac{\eta}{۲}+\sqrt{\left(\frac{\eta}{۲}\right)^{۲}+۱}=z$$

زیرا

$$\overline{XE}=\sqrt{\left(\frac{\eta}{۲}\right)^{۲}+۲} \quad و \quad \overline{XY}=\sqrt{\left(\frac{\eta}{۲}\right)^{۲}+۱}$$

برای تعیین $z_۲$، ابتدا نقطه‌های Mو M' را به‌مختصات $\left(۱\pm, \frac{\eta_۱}{۲}\right)$ پیدا می‌کنیم و نقطهٔ Z را طوری می‌سازیم که داشته باشیم:

$$\overline{MZ}=\overline{M'Z}=\overline{X_۱E}$$

دراین صورت

$$OZ=z_۲$$

زیرا

$$\overline{X_۱E}=\sqrt{\left(\frac{\eta_۱}{۲}\right)^{۲}+۲}$$

به نحوی که

$$\overline{OZ}=\frac{\eta_۱}{۲}+\sqrt{\left(\frac{\eta_۱}{۲}\right)^{۲}+۱}$$

درضمن باید درنظرداشت که $\eta_۱<۰$.

حالا تنها این مانده است که y را به‌دست‌آوریم.

برای این‌منظور، نقطه‌های N و N' را طوری پیدا می‌کنیم که داشته باشیم:

$$\overline{ON}=\overline{ON'}=\overline{NY}=\overline{N'Y}=\overline{AZ}$$

طول نقطه‌های N و N' برابراست با $\frac{z}{۲}$؛ و از مثلث قائم‌الزاویهٔ مربوط،

عرض‌های دو نقطهٔ N و N' برابر $\pm\sqrt{(1+z_2)^2-\frac{z^2}{4}}$ می‌شود.

سرانجام، نقطهٔ T را طوری پیدا می‌کنیم که داشته باشیم:

$$\overline{NT}=\overline{N'T}=\overline{ZB}$$

دراین صورت

$$\overline{OT}=y$$

درواقع، مختصات نقطهٔ B، برابر $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ و مختصات نقطهٔ Z برابر $(0, z_2)$ است. به‌این ترتیب

$$\overline{BZ}=\sqrt{1+z_2+z_2^2},$$

$$\overline{OT}=\frac{z}{2}+\sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2-z_2}=y=2\cos\frac{2\pi}{17}$$

اکنون دایره‌ای به‌مرکز T وشعاع واحدرسم می‌کنیم تا دایرهٔ مفروض را در دوراس ۲ و ۱۷ از ۱۷ضلعی منتظم قطع کند، زیرا

$$\frac{\overline{OT}}{2}=\cos\frac{2\pi}{17}$$

۲. رسم ۱۷ ضلعی منتظم را به‌طریق دیگری هم می‌توان انجام داد. درفصل سوم ثابت کردیم: هـرمساله‌ای که به‌وسیلهٔ پرگار و خط کش قابل حل باشد، تنها به‌کمك پرگار وبا استفاده ازانعکاس نسبت به یك دایرهٔ انتخابی، قابل حل‌است.

درهمین بند نشان دادیم که چگونه می‌توان ۱۷ضلعی منتظم را به‌کمك دایرهٔ شتینر رسم کرد. اگر دایره‌ای همراه بامرکزآن معلوم باشد، این‌ساختمان را می‌توان تنها با رسم خطهای راست انجام داد، زیرا بنابر فصل دوم، هم خطهای راست مماس بـردایره وهم پاره‌خطهای ۱ و ۴ را می‌توان تنها با

رسم خطهای راست پیدا کرد.

اگرفرض را براین بگیریم که ۱۷ ضلعی‌منتظم را رسم و، بااین‌روش، معکوس‌آن را پیداکرده‌ایم، دراین صورت، شکل معکوس تنها از دایرهایی تشکیل شده است که از مرکز دایرهٔ مفروض گذشته‌اند.

۲۰۷. رسم ۱۷ ضلعی منتظم را به‌کمك پرگاروبا استفاده ازفصل‌سوم توضیح دهید.

۲۰۸. در (A ،۴۳ §)، روش رسم ۱۷ ضلعی منتظم را به کمك پرگار وخط‌کش شرح‌دادیم. خود ساختمان، به‌جزدایره‌ها، تنها شامل دوخط راست است. (شکل ۱۴۵)

طبق آن‌چه درفصل سوم دیده‌ایم، می‌توان نقطه‌های برخورد خطهای راست را، تنها بـا رسم دایره‌ها، پیدا کرد. ساختمان (A ،۴۳ §) را، بدون رسم خطهای راست، انجام دهید وآن را با ساختمان ذُرا‌رد مقایسه‌کنید.

D) رسم هفده‌ضلعی منتظم، به‌کمك زاویهٔ قائمه.

بازهم صحبت برسر حل معادله‌های زیر است:

$x^{۲}+x-۴=۰$ با ریشه‌های η و $\eta_{۱}$، درضمن $\eta>۰$ و $\eta_{۱}<۰$؛

$x^{۲}-\eta x-۱=۰$ با ریشه‌های z و $z_{۱}$، درضمن $z>۰$ و $z_{۱}<۰$؛

$x^{۲}-\eta_{۱}x-۱=۰$ باریشه‌های$z_{۲}$ و$z_{۳}$، درضمن $z_{۲}>۰$ و $z_{۳}<۰$؛

$x^{۲}-zx+z_{۲}=۰$ با ریشه‌های y و $y_{۱}$، درضمن $y>y_{۱}$.

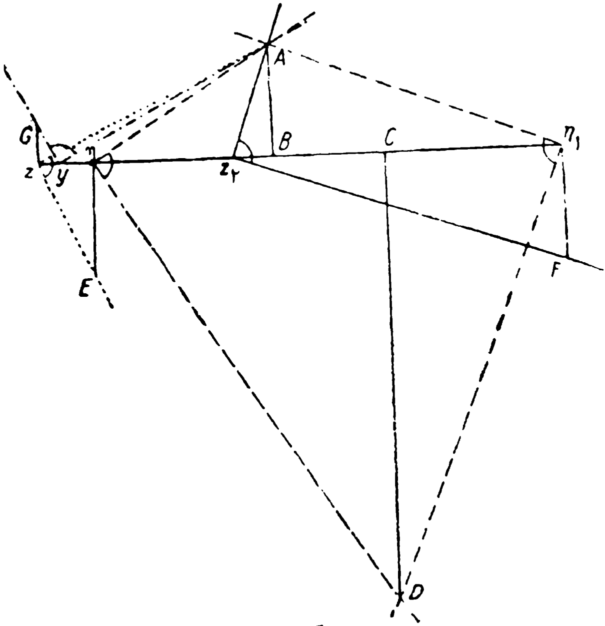
وبنابر ۳۲ §، حل این معادله‌ها را می‌توان به‌کمك زاویهٔ قائمه انجام داد.

قبل‌ازهمه، خط‌شکستهٔ $ABCD$ را رسم می‌کنیم (شکل ۱۴۹)،درضمن

$$\overline{AB}=\overline{BC}=۱ \quad \text{و} \quad \overline{CD}=۴$$

سپس، زاویهٔ قائمه را درصفحهٔ شکل طوری قرارمی‌دهیم‌که ضلع‌های آن‌از A و D بگذرند و راس آن بـر خط راست BC واقع شود. به‌این ترتیب، ریشه‌های η و $\eta_{۱}$ به‌دست می‌آید.

اکنون اگرنقطه‌های η و $\eta_{۱}$ (شکل ۱۴۹)، خطهای راست $\overline{\eta E}=۱$ و $\overline{\eta_{۱}F}=۱$ را رسـم کنیم، خـط شکستهٔ $AB\eta E$ معـرف سـه جملـه‌ای



شکل ۱۴۹

$x^{2}-\eta x-1$ و خط شکستهٔ $AB\eta_1F$ معرف سه جمله‌ای $x^{2}-\eta_1x-1$ خواهد بود.

برای تعیین z و z_2 (z_1 و z_3 را روی شکل نشان نداده‌ایم)، زاویهٔ قائمه را روی صفحهٔ شکل طوری قرارمی‌دهیم که ضلع‌های آن، یکبار از A و E وباردیگر از A و F بگذرند و راس آن، در هردوبار، بر BC قرار گیرد. ریشه‌های z و z_2 به‌دست می‌آیند.

اکنون پاره‌خط $\overline{zG}=\overline{Bz_2}$ را در نقطهٔ z عمود بر BC رسم می‌کنیم (شکل ۱۴۹). خط شکستهٔ $ABzG$ که از این راه به‌دست می‌آید، معرف سه جمله‌ای $x^{2}-zx+z_2$ است.

حالا اگرزاویهٔ قائمه رادرصفحهٔ شکل‌طوری قراردهیم که‌ضلع‌های آن از A و G بگذرد وراس آن بر BC واقع شود (که به دوطریق قابل انجام است)، آن وقت، ریشه‌های y و y_1 به‌دست می‌آیند.

ریشهٔ بزرگتر، یعنی y را رسم کرده‌ایم، که از آن‌جا، رسم ۱۷ ضلعی

منتظم هم به‌دست می‌آید، زیرا

$$\frac{y}{۲}=\cos\frac{۲\pi}{۱۷}$$

§۴۴. قضیه‌هایی دربارهٔ امکان رسم چندضلعی‌های منتظم

۱. تقسیم محیط دایره به ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۸، ۱۰ و ۱۲ بخش برابر، ازقدیم روشن بوده است، همچنین می‌توانسته‌اند هر کمان دلخواه را به دو بخش برابر تقسیم کنند و از آن راه ۲۴ ضلعی منتظم را ازروی ۱۲ ضلعی منتظم بسازند وغیره.

روش تقسیم محیط دایره به ۱۵ بخش برابررا هم می‌دانسته‌اند، زیرا

$$\frac{۱}{۱۵}=\frac{۲}{۳}-\frac{۳}{۵}$$

بنابراین، $\frac{۱}{۱۵}$ محیط دایره را می‌توان به‌دست آورد، به شرطی که $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۳}{۵}$ محیط دایره‌معلوم باشد.

به طور کلی، این قضیه درست است: اگر n حاصل‌ضرب دو عدد اول a و b باشد، آن‌وقت

$$\frac{۱}{n}=\frac{x}{a}-\frac{y}{b}$$

که در آن، x و y دوعدد مثبت درست‌اند.

درواقع، معادلهٔ سیال

$$bx-ay=۱$$

به‌شرط اول بودن a و b نسبت به‌هم، همیشه دارای جواب‌های درست مثبت است.

۲. گوس ، برای نخستین‌بار توانست آگاهی‌های ما را دربارهٔ امکان تقسیم محیط دایره به بخش‌های برابر، بالا ببرد و، به‌خصوص، قضیهٔ زیر را

ثابت کرد:

اگر p عددی اول و به‌صورت $p=2^{2^n}+1$ باشد، آن‌وقت، تقسیم محیط دایره به p بخش برابر ممکن است. برای هر عدد اول دیگر و برای هر توانی از یك عدد اول که پایهٔ آن بزرگتر از ۲ باشد، تقسیم محیط دایره به بخش‌های برابر، به‌کمك پرگار و خط‌کش، ممکن نیست.

درحالت $n=0$ به‌دست می‌آید $p=3$ که عددی است اول. درحالت $n=1$ خواهیم داشت $p=5$ که بازهم عددی اول است. و اگر $n=2$ بگیریم به $p=17$ می‌رسیم: بنابراین، تقسیم محیط دایره به ۱۷ بخش برابر، بنابر قضیهٔ گوس، ممکن است که ما هم آن را انجام دادیم.

در حالت $n=3$ به‌دست می‌آید: $p=257$. چون ۲۵۷ عددی است اول، بنابراین تقسیم محیط دایره به ۲۵۷ بخش برابر، به‌کمك پرگار و خط‌کش، ممکن است.*

درحالت $n=4$ داریم: $p=65537$. این عدد هم، اول است. بنابراین، معادلهٔ $x^{65537}-1=0$ را می‌توان برحسب رادیکال‌های با فرجهٔ دوم حل کرد، چیزی که ما را به تقسیم محیط دایره به ۶۵۵۳۷ بخش برابر می‌رساند.

درحالت‌های $n=5, 6, 7$، عدد $P=2^{2^n}+1$، اول نیست. برای $n=8$، روشن نشده است که آیا عدد p اول است یا غیراول.

از قضیهٔ گوس همچنین روشن می‌شود که، برای هر توانی از یك عدد اول، وقتی که این عدد بزرگتر از ۲ باشد، نمی‌توان محیط دایره را تقسیم کرد. بنابراین، مثلاً نمی‌توان محیط دایره را به ۹، ۲۵ یا ۲۷ بخش برابر تقسیم کرد.

۳. به‌این ترتیب، محیط دایره را می‌توان به ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۸، ۱۰، ۱۲، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۲۴ $\left(\frac{1}{24}=\frac{2}{3}-\frac{5}{8}\right)$ و ۳۰ بخش برابر تقسیم کرد، ولی نمی‌توان آن را به ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۹، ۲۳ و ۲۹ بخش برابر تقسیم کرد، زیرا این عددهای اول، قابل بیان به‌صورت $2^{2^n}+1$ نیستند؛ همچنین

---

*) ریشه‌لو (*Richelot*)، دربارهٔ راه حل طولانی این مساله، بحث کرده و آن را به انجام رسانده است: *Grelle – Journal, B. 9, 1832*.

تقسیم محیط دایره بــه ۹، ۲۵ و ۲۷ بخش برابر ممکن نیست، زیرا این‌ها، توان‌هایی ازعددهای اول هستند.

بالاخره نمی‌توان محیط دایره را بــه ۱۴، ۲۱، ۲۸، ۱۸ و ۲۲ بخش برابر تقسیم کرد، زیــرا اگر مثلاً می‌توانستیم محیط دایره را بــه ۱۴ بخش برابر تقسیم کنیم، آن‌وقت تقسیم آن به ۷ بخش برابر هم ممکن بود. به‌همین ترتیب، تقسیم محیط دایره به ۱۸ یا ۲۲ بخش بــرابــر ممکن نیست ، زیرا نمی‌توان آن را به ۹ یا ۱۱ بخش برابر تقسیم کرد.[۱۱۲]

فصل هشتم

حل مساله‌های ساختمانی درجهٔ سوم و درجهٔ چهارم

§۴۵. تضعیف* مکعب (مسالهٔ ده‌لون)

اگر s ضلع مکعب مفروض، و S ضلع مکعب مجهول (باحجم دو برابر) باشد، داریم:

$$S^{3} = 2s^{3} \Rightarrow S = s\sqrt[3]{2}$$

به‌این ترتیب، مسالهٔ مشهور تضعیف مکعب، منجر به‌ساختن $\sqrt[3]{2}$ می‌شود.

این مساله، حالت خاصی ازمسالهٔ زیر است که بارها به‌وسیلهٔ ریاضی‌دانان باستان مورد مطالعه قرار گرفته است.[113]

دوپاره‌خط a و b داده شده است. می‌خواهیم دو واسطهٔ هندسی آن‌ها را بسازیم، یعنی پاره‌خط‌های x و y را طوری پیدا کنیم‌که در دومعادلهٔ زیر صدق کنند:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

ازاین برابری‌ها نتیجه می‌شود:

$$x = \sqrt[3]{a^{2}b} \quad \text{و} \quad y = \sqrt[3]{b^{2}a}$$

---

*) تضعیف، یعنی دو برابر کردن؛ تضعیف مکعب، یعنی پیدا کردن مکعبی که حجم آن دو برابر حجم مکعب مفروض باشد.

که درحالت خاص $a=۱$ و $b=۲$ به‌دست می‌آید:

$$x=\sqrt[3]{۲} \quad \text{و} \quad y=\sqrt[3]{۴}$$

مسالهٔ تضعیف مکعب منجر بـه ساختن $\sqrt[3]{۲}$ و یـا حل نموداری معادلهٔ $x^۳-۲=۰$ می‌شود. این معادله، بـه کمك رادیکال‌های با فرجهٔ دوم قابل حل نیست (§ ۳۶).

بنابراین، $\sqrt[3]{۲}$ را نمی‌توان به‌کمك پرگاروخط‌کش رسم‌کرد. برای حل این مساله، به مقطع‌های مخروطی و یا منحنی‌های بغرنج‌تری نیاز داریم که بتوان آن‌ها را به‌کمك نقطه‌ها ویا ابزارهای خاص رسم کرد.

۱. رسم نموداری به‌کمك مقطع‌های مخروطی.

α) اگر سهمی‌های

$$x^۲=ay \quad \text{و} \quad y^۲=bx$$

را درنظربگیریم، مختصات نقطهٔ برخورد آن‌ها، به‌جز مبداء مختصات، چنین است:

$$\xi=\sqrt[3]{a^۲b} \quad \text{و} \quad \eta=\sqrt[3]{b^۲a}$$

β) اگر دومقطع مخروطی

$$x^۲=ay \quad \text{و} \quad xy=ab$$

رارسم کنیم، نقطهٔ برخوردآن‌ها، به‌جزمبداء مختصات، به‌این مختصات‌است:

$$\xi=\sqrt[3]{a^۲b} \quad \text{و} \quad \eta=\sqrt[3]{ab^۲}$$

γ) اگر دایره و سهمی زیر را درنظر بگیریم:

$$x^۲+y^۲-bx-ay=۰ \quad \text{و} \quad y^۲=bx$$

آن‌وقت، نقطهٔ برخورد آن‌ها، به‌جز مبداء، به‌این مختصات است:

$$\xi=\sqrt[3]{a^۲b} \quad \text{و} \quad \eta=\sqrt[3]{ab^۲}$$

به‌این ترتیب، درهر سه‌حالت، برای پیدا کردن دوواسطهٔ هندسی، باید نقطه‌های برخورد دو مقطع مخروطی را پیدا کرد.[۱۱۴]

اگر درحالت خاص، فرض کنیم: $a=m$ و $b=1$، آن‌وقت

$$\xi=\sqrt[3]{m^2}\ ,\quad \eta=\sqrt[3]{m}$$

بنابراین، برای پیداکردن $\sqrt[3]{m}$ ، باید یکی از سه روش (α، β) و (γ) را به‌کار برد.

برای $b=1$، حالت سوم، روش ساده‌تری را درعمل به‌دست‌می‌دهد. دراین حالت، معادلهٔ سهمی، چنین می‌شود:

$$y^2=x$$

که به m بستگی ندارد و، بنابراین، همیشه می‌توان آن را رسم کرد.[115]

دراین صورت، مختصات مرکز دایره چنین است:

$$\frac{b}{2}=\frac{1}{2}\ ,\quad \frac{a}{2}=\frac{m}{2}$$

وچون دایره از مبداء مختصات می‌گذرد، نیازی به‌محاسبهٔ شعاع آن نیست.

اگربخواهیم به‌طریق نموداری، تعداد زیادی ریشهٔ سوم را پیداکنیم، روش زیر، مناسب‌تر از روش‌های دیگر است.

روی کاغذ شطرنجی با خانه‌های میلی‌متری، سهمی $P(y^2=x)$ را رسم و نقطهٔ به‌طول $\frac{1}{2}$ و عرض $\frac{m}{2}$ را روی‌صفحهٔ‌کاغذ پیدا می‌کنیم. سپس، سوزن پرگار را روی نقطهٔ $\left(\frac{m}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right)$ می‌گذاریم ودهانهٔ پرگاررا آن‌قدر بازمی‌کنیم تا نوك دیگرآن به‌مبداء مختصات برسد و دایره‌ای رسم می‌کنیم. سرانجام، نقطهٔ برخورد سهمی را با دایره‌ای که از مبداء می‌گذرد مشخص می‌کنیم.

نقطهٔ برخورد را به کمك پرگار مدرج، و بدون رسم خود دایره، می‌توان پیداکرد. عرض این نقطهٔ برخورد، برابراست باریشهٔ سوم عدد m.

۲. حل به‌کمك کنکوئید نیکومد (قریب ۱۵۰ سال پیش از میلاد).

a) نیکومد، به‌کمك یك منحنی از درجهٔ بالا، روش ساده‌ای پیداکرد

که نه تنها بـرای تضعیف نموداری مکعب ، بلکه برای تثلیث زاویه و حل نموداری معادلهٔ درجه سوم هم به‌کارمی‌رود. خود منحنی به‌طریق زیر به‌دست می‌آید.

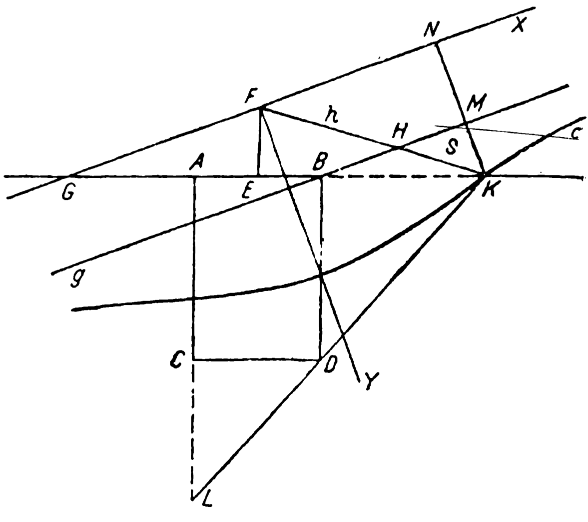
نقطهٔ F، خط راست g و پاره‌خط s را درنظرمی گیریم (شکل ۱۵۰). خـط راست دلخواه h را از نقطهٔ F می گـذرانیم و، روی آن، از نقطهٔ H (برخورد آن با g) پاره‌خط s را جدا می‌کنیم. وقتی‌که خط راست h تغییر کند، نقطهٔ حاصل، منحنی c ــ کنکوئیدنیکومد ــ را رسم می کند.

نقطهٔ F را قطب، خط راست g را پایه و پاره خط s را بازهٔ منحنی می‌نامند.

به‌سادگی می‌توان وسیله‌ای مکانیکی ساخت کـه، به کمك آن، بتوان این منحنی را رسم کرد.

خود نیکومـد این وسیله را ساخت. ایـن وسیله ، بعـد از پـرگار، قدیمی‌ترین وسیله، برای رسم منحنی‌هاست.

b) قبل‌ازهمه، معادلهٔ این‌منحنی را می‌دهیم. ازتشابه‌مثلث‌های KHM و KFN (شکل ۱۵۰) به‌دست می‌آید:



شکل ۱۵۰

$$\frac{\overline{KF}}{\overline{KH}}=\frac{\overline{KN}}{\overline{KM}} \Rightarrow \frac{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}{s}=\frac{y}{y-p}$$

وضع دستگاه مختصات، از شکل ۱۵۰ روشن است؛ p عبارت است از فاصلهٔ نقطهٔ F، تا پایهٔ g.

از معـادله دیده می‌شود که منحنی از درجـهٔ چهارم و نقطهٔ F، نقطهٔ مضاعف آن است. منحنی از دو بخش تشکیل شده است که پایهٔ g، مجانب مشترك آن‌هـا‌ست . به‌جز این‌هـا ، منحنی از دو نقطهٔ سیکلیك موهومی هم می گذرد.

c) اکنون روشن می کنیم که، به کمك این‌منحنی، می‌توان هردو واسطهٔ هندسی پاره‌خط‌های a و b را پیدا کرد.

فرض کنید پاره‌خط‌های عمود برهم $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ (شکل ۱۵۰)، به‌ترتیب، برابر با a و b باشند. سپس فرض کنید:

$$\overline{AC}=a$$

E را وسط پاره‌خط AB بگیرید و خط راست FE را عمود بر AB فرض کنید، به‌نحوی که داشته باشیم:

$$\overline{FE}=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^{2}-\left(\frac{a}{2}\right)^{2}}$$

سپس، خط راست FG را رسم کنید و خط راست g را از نقطـهٔ B موازی با FG بکشید. اکنون اگر کنکوئید c را به‌کانون F، پایهٔ g و بازهٔ $s=\frac{b}{2}$ رسم کنید، خط راست AB را در نقطهٔ K قطع می کند،[۱۱۶] که از آن‌جا، نقطهٔ L رأس چهارم D از مستطیل $ABCD$ به‌دست می آید.

اکنون، به کمك محاسبه، به‌سادگی ثابت می‌شود که $\overline{BK}$ و $\overline{CL}$ عبارتند از واسطه‌های هندسی بین پاره‌خط‌های $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$. ولی ما دراین‌جا، به‌این محاسبه نمی پردازیم.

اگر در حالت خاص داشته باشیم:

$$a=1 \quad , \quad b=2$$

آن‌وقت خواهیم داشت:

$$\overline{CL}=\sqrt[3]{2} \quad , \quad \overline{BK}=\sqrt[3]{4}$$

d) وقتی که می‌خواهیم دو واسطهٔ هندسی را پیدا کنیم، لزومی ندارد تمامی منحنی را رسم کنیم، کافی است بخشی از منحنی را، کـه شامل نقطهٔ برخورد است، به‌دست آوریم.

درعمل، برای پیداکردن نقطهٔ برخورد، می‌توانیم از یك نوار کاغذی استفاده کنیم که روی آن، پاره‌خط $s=\frac{b}{2}$ مشخص شده باشد.

یادآوری می‌کنیم که، تعیین $\sqrt[3]{2}$ به‌کمك نوار کاغذی را، نباید یـك راه‌حل تقریبی دانست (§۲۲).[117]

۳. حل به‌کمك سیکلوئید دیوکلس (حدود ۱۵۰ سال پیش ازمیلاد).

a) دیوکلس، برای حل این‌مسأله، ازمنحنی دیگری استفاده‌کرده است، که اگرچه نمی‌توان وسیلهٔ ساده‌ای (مثل حالت کنکوئید) برای رسم آن پیدا کرد، ولی به‌هرحال راه‌حل مسألهٔ مورد نظر را به‌دست می‌دهد.

AB را پاره‌خط مفروضی به‌طول ۱ فرض کنید (شکل ۱۵۱). خطهای راست g_1 و g_2 را بردوانتهای این پاره خط عمود و نقطهٔ دلخـواه P_1 را روی g_1 انتخاب می‌کنیم. روی خط راست g_2، نقطهٔ P_2 را طوری در نظر می‌گیریم که برای آن داشته باشیم:

$$\overline{AP_2}=\overline{BP_1}^3$$

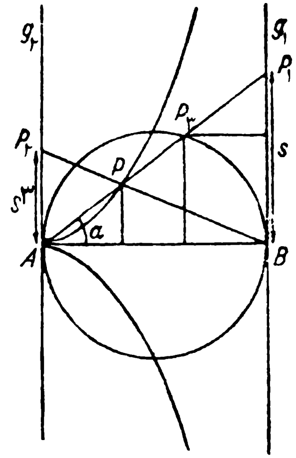
(طول پاره‌خط $\overline{AB}$ را واحد می‌گیریم).

به‌این ترتیب، اگر فرض کنیم : $\overline{BP_1}=s$، آن‌وقت

$$\overline{AP_2}=s^3$$

اکنون اگر نقطهٔ برخورد خطهای راست AP_1 و BP_2 را P بگیریم، با تغییر s یك منحنی رسم می‌کند که همان سیکلوئید دیوکلس است.

b) قبل از هرچیز، معادلهٔ این منحنی را پیدا می‌کنیم (شکل ۱۵۱).



شکل ۱۵۱

معادلهٔ خط راست AP_1 به‌صورت

$$y = sx$$

و معادلهٔ خط راست BP_2 به‌صورت

$$y = -s^3(x-1)$$

در می‌آید، که اگر s را بین آن‌ها حذف کنیم، به‌معادلهٔ سیکلوئید می‌رسیم:

$$y^2 = \frac{x^3}{1-x}$$

c) ویژگی دیگری از منحنی را، که می‌تواند برای رسم آن مفید باشد، شرح می‌دهیم.

به‌قطر AB نیم دایره‌ای رسم می‌کنیم و زاویهٔ BAP_1 را برابر α می‌گیریم (شکل ۱۵۱). اگر نیم دایره، خط راست AP_1 را، به‌جز A، در نقطهٔ دیگر P_3 قطع کند، آن‌وقت $AP = P_3P_1$. برای اثبات این مطلب، کافی است توجه کنیم که تصویرهای دوپاره‌خط برخط راست AB، طولی برابر دارند.

تصویر پاره‌خط P_3P_1 بر AB عبارت است از

$$1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$$

تصویر پاره خط AP (طول نقطهٔ P) را می‌توان با قراردادن $y = xtg\alpha$ در معادلهٔ سیکلوئید و پیداکردن x، به‌دست آورد؛ نتیجه، همان $x = \sin^2\alpha$ است و قضیه ثابت می‌شود.

۴. راه‌حل آپولونیوس (حدود ۲۰۰ سال پیش از میلاد).

AB و AC را دو ضلع مجاور از مستطیل $ABCD$، و E را مرکز آن فرض کنید.

اگر روی امتداد ضلع‌های AB و AC، دو نقطهٔ X و Y را طوری پیدا کنیم که از E به‌یك فاصله باشند و، در ضمن، خط راستی‌که آن‌ها را به‌هم وصل می‌کند، از D بگذرد، خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BY}} = \frac{\overline{BY}}{\overline{CX}} = \frac{\overline{CX}}{\overline{AB}}$$

برای کوتاه‌شدن بحث، به‌اثبات این دو برابری نمی‌پردازیم وتنها یادآوری می‌کنیم که نقطه‌های X و Y باید برامتداد ضلع‌های AB و AC، از طرف نقطه‌های B و C، قرار گیرند.

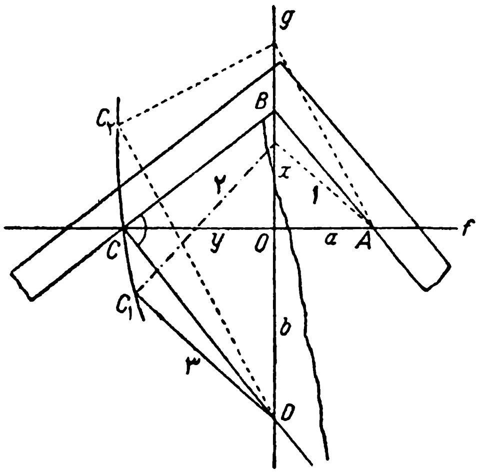
۵. حل به‌وسیلهٔ دو زاویهٔ قائمه (افلاطون، حدود ۴۰۰ سال پیش از میلاد).

خط‌های راست و عمود برهم f و g را درنظر می‌گیریم. اگر A را نقطهٔ دلخواهی از f و $ABCD$ را خط شکستهٔ قائم‌الزاویه‌ای فرض‌کنیم که رأس‌های A و C ازآن بر f و رأس‌های B و D بر g واقع باشند (شکل ۱۵۲)، خواهیم داشت:

$$a:x = x:y = y:b$$

یعنی x و y، دو واسطهٔ هندسی بین a و b خواهند بود.

a) اگر a و b مفروض باشند، می‌توان x و y را بارسم خط شکستهٔ قائم‌الزاویهٔ $ABCD$ به‌دست آورد. دو رأس A و D از آن معلوم است و دو رأس دیگر B و C از آن را باید پیدا کرد.



شکل ۱۵۲

به‌این هدف می‌توان با روش آزمایش و خطا، و با رسم منحنی خطا، برای نقطهٔ B یا C رسید.

برای این منظور، خط راست دلخواه ۱ را از A می‌گذرانیم، در نقطهٔ برخورد آن با g، عمود ۲ را بر آن و، سپس، از D عمودی بر ۲ رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد آن با خط راست ۲، نقطه‌ای از منحنی خطا است. به‌همین ترتیب، نقطهٔ $C_۲$ هم به‌دست می‌آید.

همیشه می‌توان نقطه‌های $C_۱$ و $C_۲$ را طوری پیدا کرد که در نزدیکی خط راست f واقع باشند. در این صورت، منحنی خطا را، در این فاصلهٔ کوتاه، می‌توان به‌تقریب، خط راست به‌حساب آورد.

b) اگر دو زاویهٔ قائمهٔ متحرک در اختیار داشته باشیم، می‌توانیم مساله را با دقت کامل حل کنیم. تنها باید دوزاویهٔ قائمه را روی صفحهٔ شکل طوری قرار دهیم که در طول یکی از ضلع‌های مجاور به‌زاویه قائمه برهم قرار گیرند و ضلع دوم یکی از آن‌ها از A و ضلع دوم دیگری از D بگذرد (شکل ۱۵۲). در ضمن، باید رأس زاویهٔ اول بر g و رأس زاویهٔ دوم بر f قرار گیرد.[۱۱۸]

با مختصری حرکت، می‌توان زاویه‌های قائمه را به‌وضع مورد نظر قرار داد که، در نتیجه، جواب دقیق مسأله به‌دست می‌آید (§۲۲).

اگر در حالت خاص، فرض کنیم $a = ۱$، خواهیم داشت:

$$x = \sqrt[3]{b} \quad , \quad y = \sqrt[3]{b^{۲}}$$

به‌این ترتیب، اگر $a = ۱$ و $b = ۲$ باشد، به‌دست می‌آید:

$$x = \sqrt[3]{۲}$$

۶. راه‌حل تقریبی بوانافالچه ($Buonafalce$).

ABC را مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقینی با ضلع‌هـای مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ AB و AC درنظر می‌گیریم. وتر را به‌شش بخش برابر تقسیم و روی AC (از C به A) نقطهٔ D را طوری پیدا می‌کنیم که داشته باشیم:

$$\overline{CD} = \frac{۱}{۶}\overline{BC}$$

در این صورت، $\overline{BD}$ به‌تقریب برابر $\sqrt[3]{۲}\ \overline{AB}$ خواهد بود.

اثبات. $\overline{AB}$ را برابر ۱ می‌گیریم. در این صورت

$$\overline{BC} = \sqrt{۲} \quad \text{و} \quad \overline{AD} = ۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۶}$$

بنابراین

$$\overline{BD} = \sqrt{۱ + \left(۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۶}\right)^{۲}} = \sqrt{\frac{۳۷ - ۶\sqrt{۲}}{۱۸}} =$$

$$= \frac{\sqrt{۲}}{۶}\sqrt{۳۷ - ۶\sqrt{۲}} = ۱/۲۵۸۶۳،$$

از طرف دیگر داریم:

$$\sqrt[3]{۲} = ۱/۲۵۹۹$$

بنابراین، $\overline{BD}$ به‌تقریب برابر با $\sqrt[3]{۲}$ است و اشتباه از $\frac{۲}{۱۰۰۰}$ تجاوز نمی‌کند.

۷. درعمل، اغلب لازم می‌شود تا $\sqrt[3]{2}$ را رسم کنیم. درچنین موردهایی، استفادهٔ از دوروش اخیر، می‌تواند نیاز ما را، به‌سادگی و بدون برخورد با بغرنجی‌ها، برآورد.

§ ۴۶. تثلیث زاویه

۱. تثلیث زاویه (تقسیم زاویه به‌سه قسمت برابر) به‌چه معادله‌ای منجر می‌شود؟

اگرعبارت

$$\left(\cos\frac{\alpha}{3}+i\sin\frac{\alpha}{3}\right)^3$$

را ابتدا قضیهٔ موآور وسپس بنا بر بسط دوجمله‌ای باز کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\left(\cos\frac{\alpha}{3}+i\sin\frac{\alpha}{3}\right)^3=\cos\alpha+i\sin\alpha=$$

$$=\left(\cos^3\frac{\alpha}{3}-3\cos\frac{\alpha}{3}\sin^2\frac{\alpha}{3}\right)+i\left(3\cos^2\frac{\alpha}{3}\sin\frac{\alpha}{3}-\sin^3\frac{\alpha}{3}\right)$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$\cos\alpha=\cos^3\frac{\alpha}{3}-3\cos\frac{\alpha}{3}\sin^2\frac{\alpha}{3}=4\cos^3\frac{\alpha}{3}-3\cos\frac{\alpha}{3} \qquad (1)$$

اکنون فرض کنید، زاویهٔ α وپاره‌خط دلخواهی، به‌طول واحد، مفروض باشند. دراین صورت می‌توان $\cos\alpha$ را همچون پاره‌خط مفروض و $\cos\frac{\alpha}{3}$ را همچون پاره خط مجهول درنظر گرفت. اگر فرض کنیم:

$$2\cos\alpha=a \quad , \quad 2\cos\frac{\alpha}{3}=x$$

آن وقت، از برابری (۱)، به‌این معادله می‌رسیم:

$$x^{3}-3x-a=0 \qquad (2)$$

اگر این معادلهٔ درجه سوم، بـه‌ازای مقداری از a، قابل حل به‌کمك رادیکالهای با فرجهٔ ۲ باشد، آن وقت زاویهٔ متناظر آن‌را می‌توان به‌کمك پرگار و خط‌کش به سه‌بخش برابر تقسیم کرد. برعکس، اگر زاویه‌ای را بتوان با پرگار و خط‌کش، به سه بخش برابر تقسیم کرد، آن‌وقت، معادلهٔ درجه سوم متناظر آن به کمك ریشه‌های دوم قابل حل است. ماهم ابتدا به‌همین مطلب می‌پردازیم.

A) زاویه‌هایی‌که تقسیم‌آن‌ها به‌سه‌بخش برابر، باپرگار وخط‌کش‌عملی است.

a) مثلاً زاویهٔ ۹۰ درجـه و زاویهٔ ۴۵ درجه $\left(=\frac{90^\circ}{2}\right)$ از ایـن گونه‌اند. دراین حالت‌ها، مقدار a درمعادلهٔ (۲) به‌ترتیب بـرابر ۰ و $\sqrt{2}$ است. خود معادله، به‌صورت‌های زیر درمی‌آید:

$$x^{3}-3x=0 \quad \text{و} \quad x^{3}-3x-\sqrt{2}=0$$

ریشه‌های معادله در حالت اول برابر ۰، $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ و در حالت دوم برابر $\sqrt{2+\sqrt{3}}$، $-\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2-\sqrt{3}}$ است،کـه کاملاً با تثلیث زاویه‌های ۹۰ درجه و ۴۵ درجه سازگارند.

b) مجموعه‌ای نامتناهی از زاویـه‌ها وجود داردکه به‌کمك پرگار و خط‌کش، قابل تقسیم به سه بخش برابرند.

مثلاً اگر زاویهٔ ۴۵ درجـه را نصف‌کنیم، بـه زاویه‌ای می‌رسیم‌که تقسیم‌آن به سه‌بخش برابر، به‌کمك پرگاروخط‌کش، عملی است؛ همین‌وضع درمورد زاویهٔ $\frac{45}{4}$ درجه‌وغیره هم‌وجود دارد. به‌طورکلی هرزاویهٔ به‌صورت $\frac{\pi}{2^n}$ را می‌توان با پرگار و خط‌کش به سه بخش برابر تقسیم‌کرد (n، عددی است درست ومثبت).

زاویه‌های دیگری هم می‌توان پیداکرد کـه، تقسیم آن‌ها به سه بخش

برابر، به‌کمك پرگار و خط‌کش ممکن باشد.

s را پاره‌خطی می‌گیریم که بتوان آن را از واحد و به‌کمك پرگار و خط‌کش رسم کرد. اگر فرض کنیم:

$$۲\cos\alpha = a = s^{۳} + ۳s$$

آن‌وقت، می‌توان $\cos\alpha$ و، همراه با آن، زاویهٔ α را ساخت. دراین حالت، معادلهٔ (۲)، دارای ریشهٔ s است، بنابراین

$$\cos\frac{\alpha}{۳} = \frac{s}{۲}$$

یعنی تثلیث چنین زاویه‌ای، به‌کمك پرگاروخط‌کش، ممکن است.

B) زاویه‌هایی‌که نمی‌توان آن‌ها را، به‌کمك پرگار و خط‌کش، به‌سه بخش برابر تقسیم کرد.

این‌گونه زاویه‌ها هم، یك مجموعهٔ نامتناهی را تشکیل می‌دهند. مثلاً، فرض‌کنید $a = ۱$، به‌نحوی که

$$\cos\alpha = \frac{۱}{۲} \text{ ، } \alpha = ۶۰^{\circ}$$

دراین صورت، معادلهٔ (۲) به‌این صورت درمی‌آید:

$$x^{۳} - ۳x - ۱ = ۰$$

که دارای ریشه‌های گویا نیست، زیرا اگراین معادله ریشهٔ گویا داشته باشد، باید برابر ۱+ یا ۱− باشد (§ ۳۶). بنابراین، معادله جوابی به‌صورت ریشه‌های دوم ندارد (§ ۳۶).

بنابراین، زاویهٔ ۶۰ درجه را نمی‌توان، به کمك پرگار وخط‌کش، به‌سه بخش برابر تقسیم کرد؛ واین، به‌معنای آن است که زاویهٔ ۲۰ درجه (و بنابراین، زاویهٔ ۴۰ درجه) را نمی‌توان به‌کمك پرگاروخط‌کش رسم کرد.

این نتیجه را قبلاً هم به دست آورده بودیم (§ ۴۲): زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به‌ضلع نه‌ضلعی منتظم، برابر است با ۴۰ درجه، درنتیجه، این زاویه را، مثل ضلع نه‌ضلعی منتظم نمی‌توان به‌کمك پرگار وخط‌کش رسم کرد.

مجموعهٔ نامتناهی دیگری از زاویهٔ α را می‌توان نشان داد که، درمورد آن‌ها، معادلهٔ درجه سوم مربوط، قابل حل بـه‌کمك رادیکال‌های با فرجهٔ ۲ نباشد. به‌این ترتیب، بی‌نهایت زاویه وجود دارد که تقسیم آن‌ها به سه بخش برابر، به‌کمك پرگار وخط کش، ممکن نیست.

۲. تثلیث زاویه به‌کمك مقطع‌های مخروطی.

تثلیث زاویـه را می‌توان بـا رسم یك مقطع مخروطی و پیدا کردن نقطه‌های برخورد آن با دایره پیدا کرد. ما دو روش ازاین‌گونه‌را شرح می‌دهیم.

a) روش شال ($Chasles$).

فرض کنید بخواهیم زاویهٔ AOB را بـه سه بخش برابر تقسیم کنیم (شکل ۱۵۳).

α) دایرهٔ K را به‌مرکز O وشعاع دلخواه می‌کشیم و مماس t را، در نقطهٔ A، بر آن رسم می‌کنیم. سپس از نقطهٔ O خط راستی می‌گذرانیم که با OB زاویهٔ دلخواه ω را بسازد، همچنین ازنقطهٔ A خط راستی رسم می‌کنیم تا با t همان زاویهٔ ω، منتهی درجهت عکس را بسازد.

نقطهٔ برخورد P که ازاین راه بـه‌دست می‌آیـد (شکل ۱۵۳)، ضمن تغییرω، منحنی h را می‌پیماید: هذلولی شال.

اگر X، یکی ازنقطه‌های برخورد هذلولی h بادایرهٔ K باشد، داریم:

$$\widehat{BOX}=\frac{۱}{۳}\widehat{BOA}$$

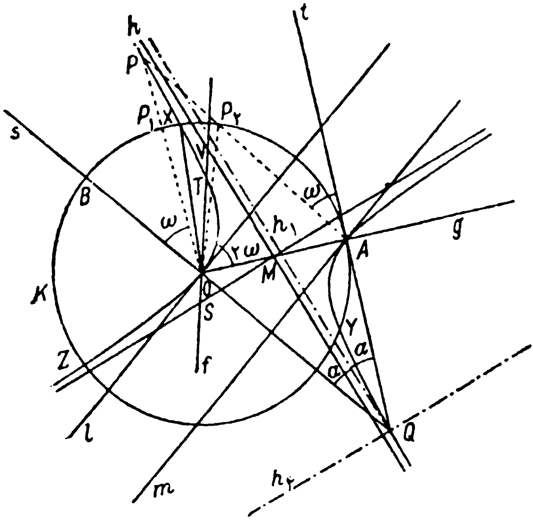
در واقع، اگر $P_۱$ و $P_۲$ را نقطه‌هایی از دایرهٔ K، متناظر با نقطهٔ P بگیریم (شکل ۱۵۳)، همیشه خواهیم داشت:

$$\widehat{AOP_۲}=۲\,\widehat{BOP_۱}$$

اکنون اگر نقطه‌های $P_۱$ و $P_۲$، بریك نقطهٔ X منطبق شوند، آن‌وقت

$$\widehat{AOX}=۲\,\widehat{BOX}$$

β) به‌بررسی منحنی h می‌پردازیم.



شکل ۱۵۳

این منحنی از دودسته نیم خط O و A به‌دست می‌آید. هرنیم خطی که از A آغـاز شود، یك زاویـهٔ ω را معین می‌کند و، بنابراین، نیم خط کاملاً معینی از دستهٔ O متناظر با آن است، وبرعکس.

به‌خصوص، نیم‌خط s از دستهٔ O ($\omega = 0$)، متناظراست بانیم‌خط t از دستهٔ A؛ نیم خط g ازدستهٔ A ($\omega = 90°$)، متناظر است با نیم‌خط l ازدستهٔ O، که بر s عمود است. اگر g را متعلق به دستهٔ O بدانیم، با نیم‌خط m از دستهٔ A متناظر می‌شود و، درضمن نیم‌خط m باید موازی با نیم‌خط l باشد.

نیمسازهای زاویهٔ Q (شکل۱۵۳) را h_1 و h_2 می‌نامیم وفرض‌می کنیم که h_1 با s (وبا t)، زاویهٔ α را تشکیل دهد.

اکنون اگرنیم‌خطی ازدستهٔO راطوری درنظربگیریم که با s زاویه‌ای برابر با α تشکیل دهد، آن‌وقت، نیم خط متناظر دستهٔ A موازی با نیم خط اول می‌شود، به‌نحوی‌که نقطهٔ برخورد آن‌هـا به بی‌نهایت دور می‌رود. در حالتی هم که نیم‌خط دستهٔ O را موازی با نیمساز h_2 بگیریم ، همین وضع پیش می‌آید.

دودسته نیم خط به‌مرکزهای O و A هم‌نهشت‌اند، بنابراین، تصویری

هستند، ولی زاویه‌های باجهت‌های مخالف دارند. به‌این ترتیب، این دودسته معرف يك هذلولی متساوی‌الساقین‌اند،[119] که از OAQ می‌گذرد، در O مماس l ودر A مماس m را دارد.

چون مماس l موازی m است، پس نقطهٔ Mوسط پاره‌خط OA، مرکز هذلولی است. مجانب‌های هذلولی، با خطهای راست h_1 و h_2 موازی‌اند.

γ) درعمل، برای انجام رسم، باید ابتدا نقطهٔ M و دومجانب را به‌دست‌آورد. برای پیداکردن نقطه‌های X، Y وZ، بهتراست ازاین خاصیت هذلولی استفاده‌کنیم‌که: برای نقطه‌های برخورد خطراست f (شکل ۱۵۳) با هذلولی ومجانب‌های آن، این رابطه برقرار است:

$$\overline{TV}=\overline{OS}$$

رسم تمامی هذلولی لازم نیست، کافی است بخشی ازآن را رسم‌کنیم که به نقطه‌های برخورد آن با دایرهٔ K نزدیك است. و به کمك خط‌کش مدرج، می‌توان به‌سرعت به‌این هدف رسید.

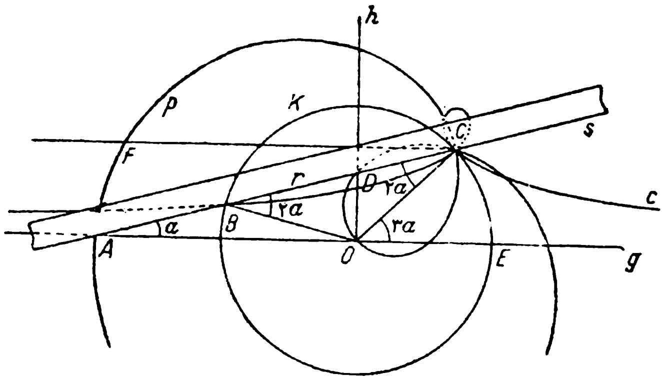
به‌جز نقطهٔ A ، هذلولی دایره را درسه‌نقطهٔ X، Y وZ قطع می‌کند و، به‌سادگی می‌توان ثابت‌کردکه، این نقطه‌ها، راس‌های يك مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند. بنابراین

$$٣\widehat{BOY}=٣\widehat{BOX}+٣٦٠^\circ=\widehat{BOA}+٣٦٠^\circ$$

δ) زاویهٔ AOB متناظر با دو هذلولی شال است. ما یکی از آن‌ها را، با رسم مماس بردایره درنقطهٔ A پیداکردیم. اگر مماس درنقطهٔ B را رسم‌کنیم و دنبالهٔ کار را ادامه دهیم، دو دسته نیم خط O و B، هذلولی متساوی الساقین دوم را مشخص می‌کنند.

b) روش دیگری برای تقسیم زاویه به‌سه بخش برابر، به‌کمك يك مقطع مخروطی ودایره، می‌آوریم، ولی ازبحث تفصیلی دربارهٔآن خودداری می‌کنیم. برای این منظور، به‌قضیهٔ معروفی نیاز داریم‌که به‌سادگی هم ثابت می‌شود.

خط راست l ونقطهٔ A را، در خارج آن، مفروض بگیرید.



شکل ۱۵۴

مکان هندسی همهٔ نقطه‌هایی که، برای هر کدام از آن‌ها، فاصلهٔ تا A دو برابر فاصلهٔ تا l باشد، عبارت است از یك هذلولی که نقطهٔ A، کانون آن و خط راست l، خط هادی آن است. کانون دوم، مرکز و مجانب‌های هذلولی را به‌سادگی می‌توان پیدا کرد.

AOB را زاویه‌ای می‌گیریم که باید به سه‌بخش برابر تقسیم شود. فرض می‌کنیم، دوخط راستی که باید از O بگذرند و زاویه را به سه بخش برابر تقسیم کنند، پیدا شده باشند.

دایره‌ای به‌مرکز O رسم و نقطه‌های برخورد دایره با چهار خط‌راستی که از O می‌گذرند، را در نظر می‌گیریم. اکنون l را نیمساز زاویهٔ AOB بگیرید.

ازاین‌شکل روشن می‌شود که، نقطهٔ مجهول C نسبت به A در فاصله‌ای قرار دارد که دوبرابر فاصلهٔ آن تا l است. بنابراین، نقطهٔ C روی هذلولی و درنقطهٔ برخورد آن با دایره قرار دارد.

۳. تثلیث زاویه به‌کمك نوار کاغذی.

فرض کنید (شکل ۱۵۴):

$$\overline{AB}=\overline{BO}=\overline{OC}=\overline{BD}=r \quad ، \quad \widehat{BAO}=\alpha$$

دراین صورت

$$\widehat{OBC}=۲\alpha \quad ، \quad \widehat{COE}=۳\alpha$$

(در ضمن $\widehat{ODB}=۹۰^\circ-\alpha$، یعنی پاره‌خط OD بر خط راست AD عمود است).

از این جا، روش ساده‌ای برای تقسیم زاویهٔ COE به سه بخش برابر به‌دست می‌آید، روشی که ساده‌تر از همه‌است و به‌کمك يك نوار کاغذی قابل تحقیق است.[۱۱۷]

زاویهٔ COE را مفروض می‌گیریم (شکل ۱۵۴). دایرهٔ K را به‌مرکز O و شعاع دلخواه r رسم می‌کنیم تا ضلع‌های زاویه را درنقطه‌های C و E قطع کند.

اکنون پاره‌خط $\overline{AB}=r$ را درلبهٔ نوارکاغذی قرار می‌دهیم و نوار را روی صفحهٔ شکل طوری می‌گذاریم‌که لبهٔ آن از C بگذرد، نقطهٔ A بر g و ونقطهٔ B بر K واقع باشد، دراین صورت

$$\widehat{CAE}=\frac{۱}{۳}\widehat{COE}$$

جای‌درست نوارکاغذی را با کمی جابه‌جا کردن‌آن، می‌توان پیداکرد. این تقسیم زاویه، به‌طور دقیق انجام می‌شود (§ ۲۲).

این روش، نه تنها درعمل مفید است، بلکه دارای ارزش نظری هم می‌باشد، زیرا به‌کمك آن می‌توان روش‌های بسیاری برای تثلیث زاویه‌پیدا کرد. ما درزیر به‌بررسی آن‌ها می‌پردازیم.

۴. تثلیث زاویه به‌کمك‌کنکوئید نیکومد و حلزون پاسکال.

a) برای‌این که‌نوار کاغذی s را درموقعیت درستی‌قراردهیم، می‌توان به‌ترتیب زیر عمل‌کرد (شکل ۱۵۴).

کنارهٔ نوارکاغذ را روی C قرار می‌دهیم، نقطهٔ A را روی خط راست g می‌گذاریم ونوار راآن‌قدر حرکت می‌دهیم تا B بردایرهٔ K واقع شود. ضمن این حرکت، نقطهٔ B کنکوئید c را می‌پیماید‌که، برای آن، C قطب، g پایه و r بازه است (§ ۴۵).

نقطهٔ برخورد c با K، همان نقطهٔ مجهول B است.[۱۲۰] از این جا، روش استفاده از کنکوئید، برای تقسیم یك زاویه به سه‌بخش برابر، روشن می‌شود.

روی شکل ۱۵۴، خط راست FC موازی g هم رسم شده‌است.

اکنون فرض کنید، زاویهٔ دلخواه $FCO = ۳\alpha$ مفروض باشد.

روی ضلع CO، پاره‌خط دلخواه r را جدا و از نقطهٔ O، که به‌این ترتیب به‌دست می‌آید، خط راست g را موازی FC رسم می‌کنیم. سپس، دایرهٔ K را به‌مرکز O وشعاع r رسم می‌کنیم و کنکوئیدی را می‌کشیم که نقطهٔ C قطب آن، خط راست g پایهٔ آن و پاره‌خط r بازهٔ آن باشد. نقطهٔ B، برخورد این کنکوئید بادایرهٔ K، یك‌سوم زاویهٔ ۳α را مشخص می‌کند.

می‌بینیم که برای هرزاویه باید کنکوئید را رسم کرد، به‌همین مناسبت، این روش تنها ازنظر تاریخی اهمیت دارد.

b) اکنون نوار کاغذی را روی صفحهٔ شکل طوری قرار می‌دهیم که کنارهٔ آن از C بگذرد و نقطهٔ B برمحیط دایرهٔ K واقع باشد؛ نوار را به بی‌نهایت روش، می‌توان بـه‌این صورت قرار داد. نقطهٔ A، یك منحنی p را می‌پیماید که به حلزون پاسکال معروف است (شکل ۱۵۴).

ازشکل روشن است که، برعکس، به‌کمك حلزون پاسکال می‌توان هر زاویهٔ دلخواه را به سه‌بخش برابر تقسیم کرد.

فرض کنید حلزون پاسکال p ونقطهٔ O واقع بر آن‌مفروض باشد. اگر بخواهیم زاویه را بـه سه‌بخش برابر تقسیم کنیم، خطراست FC را طوری رسم می‌کنیم که زاویهٔ FCO برابر بـا زاویهٔ مفروض باشد. اکنون اگر از نقطهٔ O خـطراست g را مـوازی CF رسم کنیم، g حلزون پاسکال را در نقطه‌ای مثل A قطع می‌کند و همان‌طورکه از شکل دیده می‌شود:

$$\widehat{FCA} = \frac{۱}{۳}\widehat{FCO}$$

به‌این ترتیب، اگر یك بـار برای همیشه، حلزون پاسکال را رسم کنیم، می‌توان به‌کمك آن، هرزاویهٔ دلخواه را بـه سه بخش برابر تقسیم‌کرد. برای

این منظور می‌توان حلزون پاسکال را از چوب تراشید و یا روی یك صفحهٔ شفاف رسم کرد.

۵. وسیله‌هایی برای تقسیم یك زاویه به سه بخش برابر.

برای تقسیم زاویه به سه بخش برابر، وسیله‌های زیادی درست شده است. یکی از آن‌ها، وسیله‌ای است که نیکومد برای رسم کنکوئید ساخت (§ ۴۵). وسیلهٔ دیگر، دستگاهی است که به کمك آن می‌توان حلزون پاسکال را رسم کرد. از چند وسیلهٔ دیگر، از این نوع، به کوتاهی یاد می‌کنیم.

a) اگر روی شکل ۱۵۴، نقطهٔ D را طوری قرار دهیم که داشته باشیم: $\overline{BD}=r$، آن‌وقت، همان‌طور که از شمارهٔ ۳ می‌دانیم، نقطهٔ D بر خط راست h عمود بر g در نقطهٔ O، قرار می‌گیرد.

با توجه به این یادآوری، می‌توان دو روش برای تقسیم یك زاویه به سه بخش برابر به‌دست آورد.

α) اولاً می‌توان پاره‌خط $\overline{BD}=r$ را روی نوار کاغذی قرار داد و نوار را در صفحهٔ شکل طوری قرار داد که کنارهٔ آن از نقطهٔ C بگذرد، نقطهٔ B بر دایرهٔ K و نقطهٔ D بر خط راست h قرار گیرد.

β) به همین ترتیب، می‌توان روی نوار کاغذی پاره‌خط $\overline{AD}=۲r$ را جدا کرد و، سپس، آن را در صفحهٔ شکل طوری قرار داد که کنارهٔ آن از نقطهٔ C بگذرد، نقطهٔ A بر خط راست g و نقطهٔ D بر خط راست h واقع شود.

در هر دو حالت، ثلث زاویهٔ COE به‌دست خواهد آمد.

آمادوری (*Amadori*) بر اساس روش دوم، وسیله‌ای را ساخت که به کمك آن، می‌توان مستقیماً، هر زاویهٔ دلخواه را به سه بخش برابر تقسیم کرد.

وسیله از فلز ساخته شده است و شامل دایرهٔ K، خط‌های راست g و h و یك نوار فلزی است که روی آن دو نقطهٔ A و D به فاصلهٔ ۲r از یکدیگر نشان گذاشته شده است. نقطهٔ A در طول خط راست g، و نقطهٔ D در طول خط راست h حرکت می‌کند. روش استفاده از این وسیله را، می‌توان به روشنی از روی شکل ۱۵۴ متوجه شد. ما به بحث تفصیلی دربارهٔ آن نمی‌پردازیم، زیرا وسیله‌های تثلیث زاویه، تنها ارزش نظری دارند.

b) فلدبلوم (*Feldblum*)، برای تقسیم زاویه به سه بخش برابر،

وسیله‌ای را پیشنهاد می‌کند کـه براساس همان وسیله‌ای ساخته شده است که برای تقسیم زاویه به‌دو بخش برابر (§ ۲۷) به‌کار می‌رود. داریم (شکل ۱۲۰):

$$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}$$

سپس

$$\overline{BE}=\overline{EF}=\overline{FG}=\overline{GB}$$

فرض می‌کنیم که همهٔ خطهای شکل از چوب یا فلز ساخته شده باشند و بتوانند درهمهٔ نقطه‌های مذکور حرکت کنند.

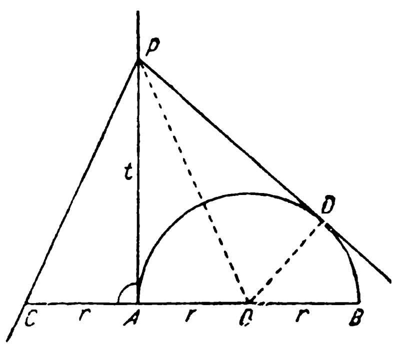
BD همیشه نیمساز زاویهٔ ABC و CB نیمساز زاویهٔ DBG است، بنابراین

$$\widehat{ABD}=\frac{1}{3}\widehat{BDG}$$

ازاین وسیله برای تقسیم هرزاویهٔ دلخواه به سه‌بخش برابر، می‌توان استفاده کرد.[۱۲۱]

با اضافه‌کردن لـوزی‌های جدید، می‌توان وسیله‌ای ساخت که بتوان به‌کمك آن، هر زاویهٔ دلخواه را به ۴، ۵،...، n بخش برابر تقسیم کرد.

c) ADB را نیم دایره‌ای می‌گیریم کـه خطراست t درنقطهٔ A برآن مماس باشد و داشته باشیم:



شکل ۱۵۵

$$\overline{CA}=\overline{AO}=\overline{OB}=r$$

اگر از نقطهٔ دلخواه P واقع بر t، به‌نقطه D وصل و مماس PD را بر نیم‌دایره رسم کنیم، خواهیم داشت:

$$\widehat{CPA}=\widehat{OPA}=\widehat{OPD}=\frac{1}{3}\widehat{CPD}$$

در وسیله‌ای که براساس این قضیه ساخته شده است، نیم‌دایره، مماس t و پاره‌خط CA از چوب ساخته شده و بدون حرکت به‌هم وصل شده‌اند.

اکنون، اگر بخواهیم یك‌زاویهٔ دلخواه را، که از زاویه CPD خیلی بزرگتر نباشد، به‌سه بخش برابر تقسیم کنیم، وسیلهٔ نامبرده را درصفحهٔ شکل طوری قرار می‌دهیم که مماس i از P بگذرد، نقطهٔ C بریکی از ضلع‌های زاویه قرارگیرد و ضلع دیگر زاویه در نقطهٔ D برنیم‌دایره مماس شود.

در این‌صورت، زاویهٔ CPA یك‌سوم زاویهٔ مفروض خواهد بود.

§۴۷. حل نموداری معادله‌های درجه سوم و درجه چهارم

مسأله‌های هندسی درجهٔ سوم و درجهٔ چهارم، سرانجام، منجر به‌حل معادله‌ای از درجهٔ سوم یا درجهٔ چهارم می‌شوند. به‌همین مناسبت، برای‌حل هندسی این‌گونه مسأله‌ها، باید به‌بررسی حل‌نموداری معادله‌های درجه سوم و درجه چهارم بپردازیم.

۱. تبدیل معادلهٔ درجهٔ چهارم به معادلهٔ درجهٔ سوم

می‌دانیم که، برای حل معادلهٔ درجه چهارم درحالت‌کلی، باید آن را به‌معادله‌ای درجه سوم تبدیل کرد.

فرض کنید، بخواهیم معادلهٔ زیر را حل کنیم.

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0 \qquad (1)$$

ابتدا $x=y-\frac{a}{4}$ می‌گیریم که در این‌صورت، معادلهٔ (۱) به‌معادلهٔ زیر منجر می‌شود:

$$y^4+Ay^2+By+C=0 \qquad (2)$$

اکنون فرض می‌کنیم $2y=u+v+w$، که در آن باید مقدارهای u و v و w را هم پیدا کرد. می‌توان آن‌ها را، تابع دو شرط زیر دانست:

$$u^2+v^2+w^2=-2A$$

$$uvw=-B$$

و آن‌وقت، u^2،v^2 و w^2 را، به‌عنوان ریشه‌های معادلهٔ زیر به‌دست آورد:

$$z^3+2Az^2+(A^2-4C)z-B^2=0 \qquad (3)$$ [122]

معادلهٔ (۳) را معادلهٔ حلال معادلهٔ (۱) گویند، اگر ریشه‌های معادلهٔ (۳) را z_1، z_2 و z_3 بنامیم، برای ریشه‌های معادلـهٔ (۲)، این رابطه‌هـا را خواهیم داشت:

$$2y_1=\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3},$$

$$2y_2=\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3},$$

$$2y_3=-\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3},$$

$$2y_4=-\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}$$

به‌این ترتیب، ریشه‌های معادلهٔ (۱) را می‌توان از روی ریشه‌هـای معادلهٔ حلال، به‌کمك عمل‌های گویا و استخراج ریشهٔ دوم، به‌دست آورد.

بنابراین، امکان یا عدم امکان حل معادلهٔ (۱)، به‌کمك رادیکال‌هـای با فرجهٔ دوم، بستگی به‌امکان یاعدم امکان حل معادلهٔ حلال به‌کمك‌رادیکال‌های با فرجهٔ دوم دارد.

۲. حل به‌کمك مقطع‌های مخروطی

در این‌جا، تنها ازمهم‌ترین روش‌های حل نموداری معادله‌های درجه سوم و درجه چهارم یاد می‌کنیم.

برای این منظور، دو مسیر مختلف را می‌توان انتخاب کرد: می‌توان

به‌دنبال آن مقطع‌های مخروطی رفت که موجب حل معادلهٔ مفروض می‌شود و یا، می‌توان دو مقطع مخروطی در نظر گرفت و معادله‌هایی را جست‌وجو کرد که به‌کمك آن‌ها حل می‌شوند.

با ذکر دو مثال، مطلب را روشن می‌کنیم.

مثال اول. این معادله را در نظر می‌گیریم:

$$x^3+ax^2+bx+c=0 \qquad (1)$$

این معادله را می‌توان به‌کمك دو مقطع مخروطی

$$x^2=y \qquad (2)$$

$$xy+ay+bx+c=0 \qquad (3)$$

حل کرد، زیرا اگر y را بین دو معادلهٔ (۲) و (۳) حذف کنیم، به‌معادلهٔ (۱) می‌رسیم.

معادلهٔ (۲)، در دستگاه محورهای مختصات قائم، یك سهمی است با پارامتر برابر ۱ و، در ضمن، بستگی به‌ضریب‌های معادلهٔ (۱) ندارد. آن‌را می‌توان، یك‌بار برای همیشه، رسم کرد.

معادلهٔ (۳)، معرف هذلولی متساوی‌الساقینی است که مجانب‌های آن موازی با محورهای مختصات و مرکز آن در نقطهٔ $(-b, -a)$ است.

برای حل معادلهٔ درجه سوم (۱)،می‌توانیم به‌این ترتیب عمل می‌کنیم: سهمی با پارامتر ۱ را رسم می‌کنیم (و بهتر است در یك کاغذ شطرنجی)، سپس مجانب‌های هذلولی را می‌کشیم و یك نقطه از آن، مثلاً نقطه برخورد با محور x یا با محور y را پیدا می‌کنیم. در این صورت، می‌توان بدون رسم تمامی هذلولی، نقطه‌های برخورد آن را با سهمی، با دقت به‌دست آورد (با §۴۶ مقایسه کنید).

مثال دوم. حالا، دو مقطع مخروطی در نظر می‌گیریم؛ دایرهٔ K:

$$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2 \qquad (4)$$

و سهمی P:

$$y^2+x=0 \qquad (5)$$

با حذف x، بین دو معادلهٔ (۴) و (۵)، به‌دست می‌آید:

$$y^{4}+(1+2m)y^{2}-2ny+(m^{2}+n^{2}-r^{2})=0 \qquad (۶)$$

بنابراین، به‌کمك این مقطع‌های مخروطی، می‌توان معادلهٔ به‌صورت زیر را حل کرد:

$$z^{4}+az^{2}+bz+c=0 \qquad (۷)$$

برای این منظور، تنها باید فرض کرد:

$$1+2m=a$$
$$-2n=b$$
$$m^{2}+n^{2}-r^{2}=c$$

سهمی (۵) ، به‌ضریب‌های معادلهٔ مفروض، بستگی ندارد و مـی‌توان آن را، یك‌بار برای همیشه، روی کاغذ شطرنجی رسم کرد. مختصات مرکز دایرهٔ K چنین است:

$$m=\frac{a-1}{2},\ n=-\frac{b}{2}$$

و شعاع دایره K، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$r^{2}=m^{2}+n^{2}-c$$

بنابراین، مرکز و شعاع دایره را، به‌کمك تقسیم‌های کاغذ شطرنجی، می‌توان به‌سادگی پیدا کرد.

برای پیدا کردن نقطه‌های برخورد سهمی P ودایرهٔ K، نیازی به‌رسم خود دایره نیست و می‌توان آن‌ها را به‌کمك پرگار درجه‌دار به‌دست‌آورد. عرض نقطه‌های برخورد، ریشه‌های معادلهٔ (۷) هستند.

این‌روش، نه‌تنها ازنظرعملی اهمیت دارد، بلکه دارای جنبه‌های‌نظری هم می‌باشد.

برای‌حل‌هرمعادلهٔ درجهٔ چهارم (وقتی‌که به‌صورت معادلهٔ (۷)درآمده باشد)، علاوه‌بر سهمی ثابت، تنها به‌پرگار و خط‌کش نیاز داریم. بنابراین،

برای حل هرمعادلهٔ دلخواه درجه چهارم، به‌جز خط راست و دایره، تنها یك مقطع مخروطی ثابت لازم است.

معادلهٔ (۷) را درحالت‌های خاص هم می‌توان حل کرد.

اگرمثلاً داشته باشیم: $c=0$، معادلهٔ (۷) منجر به‌معادلهٔ زیرمی‌شود:

$$z^3+az+b=0$$

این معادله را هم می‌توان با همان روش بالا حل کرد. در این‌حالت، از پیداکردن r هم می‌توان صرف‌نظر کرد، زیرا دایرهٔ K از مبداء مختصات می‌گذرد.

سپس، اگرداشته باشیم: $a=0$، معادلهٔ (۷) به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$z^3+b=0$$

که ریشه‌های آن را می‌توان به‌کمك سهمی وپرگار درجه‌دار به‌دست‌آورد.

۳. حل نموداری معادله‌های درجه سوم و درجه چهارم، به‌کمك یك مقطع مخروطی دلخواه

اکنون روشن می‌کنیم که، چگونه می‌توان به‌کمك یك مقطع مخروطی مفروض، ریشه‌های هر معادلهٔ درجه سوم یا درجه چهارم را بـه‌دست آورد. برای این منظور، روشی را دنبال می‌کنیم کـه متعلق به شال ($Chasles$) است.

مطلب را به‌ترتیب، و پشت سرهم، دنبال می‌کنیم.

a) K را یك‌مقطع مخروطی مي گیریم که روی صفحهٔ کاغذ رسم شده است.

خط راست g را روی صفحهٔ منحنی K اختیار می‌کنیم و با انتخاب نقطهٔ دلخواهی، به‌عنوان مبداء، در روی‌آن ترتیبی می‌دهیم که هرنقطه ازخط راست g متناظر با عددی مثبت یا منفی باشد.

نقطهٔ دلخواه O را روی K انتخاب و به‌هرنقطهٔ P ازمنحنی K عددی را نسبت می‌دهیم‌که با عدد مربوط به‌نقطهٔ برخورد نیم‌خط PO با K متناظر است.

به‌این ترتیب، هر نقطهٔ P از منحنی K متناظر با یك عدد و، برعکس، هرعدد متناظـر با نقطه‌ای از منحنی K است. خـود نقطهٔ O از منحنی K، متناظر با عددی است که مربوط به‌نقطهٔ برخورد مماس در O بر K با خط راست g می‌شود. عدد بی‌نهایت، متناظر با نقطه‌ای از K است که ازبرخورد خط راست موازی با g (از نقطهٔ O) با منحنی به‌دست می‌آید.

در این‌جا می‌توان گفت که، رشته عددهای واقع بر g، از O برمقطع مخروطی تصویر شده‌اند.

در پایین، از دو ردیف از این گـونه نقطه‌های واقع بر K استفـاده خواهیم کرد. نقطه‌ها و عددهای متناظر با آن‌ها، در ردیف اول را با ξ، و نقطه‌ها و عددهای ردیف دوم را با η نشان می‌دهیم.

وقتی که نقطه‌ای از ردیف اول بر نقطه‌ای از ردیف دوم منطبق باشد، متناظر با یك عدد می‌شوند.

b) اکنون فرض کنید، بخواهیم، به‌کمك این‌مقطع مخروطی ثابت K، معادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0 \qquad (1)$$

برای این‌منظور، تناظری از دو ردیف نقطه‌های واقع بر K را درنظر می‌گیریم که با برابری زیر سازگار باشند:

$$(\eta^2+a\eta)\xi^2+(b\eta^2+c\eta+d)=0 \qquad (2)$$

همان‌طور که از برابری (۲) برمی‌آید، هرعدد ξ متناظر با دو عدد η و، برعکس، هرعدد η متناظر با دو عدد ξ است.

بنابراین، هر نقطهٔ ξ از ردیف اول نقطه‌های واقع بر K، متناظر است با دو نقطهٔ η از ردیف دوم؛ و هرنقطهٔ η از ردیف دوم واقع بر K، متناظر است با دو نقطهٔ ξ از ردیف اول.

با توجه به‌رابطهٔ (۲)، این‌حالت هم ممکن‌است پیش آید که نقطه‌ای از ردیف اول، متناظر با نقطه‌ای از ردیف دوم باشد که برهمان نقطهٔ اول منطبق شود و، بنابراین، هردوی آن‌ها، معرف یك عدد باشند.

این نقطه‌های مضاعف را می‌توان پیدا کرد، به‌شرطی که درمعادلهٔ (۲) قرار دهیم:

$$\xi=\eta=x$$

در ضمن، در این‌صورت، معادلهٔ (۲) به‌معادلهٔ (۱) تبدیل می‌شود و، روشن است که، روی هم چهار تا ازاین نقطه‌های مضاعف وجود داردکه عددهای متناظر آن‌ها، ریشه‌های معادلهٔ (۱) خواهند بود.

به‌این ترتیب، حل معادلهٔ (۱)، منجر به‌ساختن این نقطه‌های مضاعف می‌شود.

برای این منظور، باید تناظری را که بین دو ردیف نقطه‌های واقع بر K، طبق رابطهٔ (۲)، وجود دارند، مورد بررسی قرار دهیم.

$\eta'(c$ رانقطهٔ دلخواهی از ردیف دوم (ویا عدد متناظر با آن) واقع بر K، و ξ' و ξ'' را نقطه‌های (یا عددهای) متناظر باآن‌درردیف اول فرض می‌کنیم.

در این‌صورت، از معادلهٔ (۲) نتیجه می‌شود:

$$\xi''=-\xi'$$

نقطهٔ ξ'، بنابرمعادلهٔ (۲)، نه‌تنها متناظر با η'، بلکه ضمناً متناظر با نقطهٔ دیگری مثل η'' هم می‌باشد. به‌همین‌ترتیب، نقطهٔ ξ'' هم، علاوه بر η'، باید متناظر با نقطهٔ دیگری هم از ردیف دوم باشد؛ ولی این‌نقطهٔ دوم،همان η'' است، زیرا معادلهٔ (۲) تنها شامل ξ^2 است و، بنابراین، نتیجهٔ ξ' و ξ'' (که تنها در علامت با هم فرق دارند)، یکسان است.

به‌این ترتیب، دو نقطهٔ ξ' و ξ'' از ردیف اول،که متناظر با نقطهٔ η' از ردیف دوم هستند، در ضمن، متناظر با یك نقطه، و تنها یك نقطهٔ دیگر η'' هم می‌شوند.

به‌همین ترتیب روشن است که، دونقطهٔ η' و η''، که متناظر با نقطهٔ ξ' بودند، باید متناظر با نقطهٔ ξ'' (و تنها همین‌نقطه) هم باشند.

بنابراین، برابری (۲) نه‌تنها تناظر بین ردیف نقطه‌های ξ' را با

ردیف نقطه‌هــای η معین می‌کند، بلکه در ضمن، تناظر بین نقطه‌های ξ را، درست مثل تناظر بین نقطه‌های η، برقرار می‌کند.

در واقع، دو نقطهٔ ξ' و ξ'' از ردیف ξ، وقتی متنــاظر یکدیگرندکه متناظر با تنها یك‌نقطهٔ η از ردیف دوم باشند.

ولی ازآن‌جاکه، بین این دونقطهٔ ξ' و ξ''، باید رابطهٔ

$$\xi'' = -\xi'$$

وجود داشته باشد، بنابراین یك گستره را معین می‌کند، یعنی همهٔ خطهــای راستی‌که نقطهٔ ξ' را به‌نقطه‌های متناظر ξ'' وصل می‌کنند، از یك‌نقطهٔ ثابت S می‌گذرند.

دونقطهٔ η' و η''، وقتی متناظر یکدیگــرندکه متناظر با تنها یك نقطهٔ ξ از ردیف اول باشند. از رابطهٔ (۲) معلوم است‌که تناظر بین η' و η''هم یك‌گستره را معین می‌کند و، بنابراین، خطهــای راستی‌که نقطه‌های η' را به‌نقطه‌های متناظر η'' وصل می‌کنند، ازیك نقطهٔ ثابت S' می‌گذرند.

d) به این ترتیب، به کمك معادلهٔ (۲)، دو دسته خط راست S و S'، واقع در صفحهٔ منحنی K، معین می‌شود.

هــر نیم‌خط s از دستهٔ S، منحنی K را در دو نقطهٔ ξ' و ξ'' قطع می‌کند،که متناظر بایك نقطهٔ η' از ردیف η هستند. ولی آن‌ها (بنابرآنچه قبلاً گفته‌ایم) متناظر نقطهٔ دیگر η'' از ردیف دوم هم هستند؛ η' و η'' روی نیم‌خط s' از دستهٔ S' قرار دارند.

بنابراین معلوم می‌شود که هرنیم‌خط از S، با یك و تنها یك نیم‌خط از S' متناظر است، وبرعکس. نیم‌خطهای دودسته، درتناظر متقابل یك‌به‌یك قرار دارندکه، همان‌طورکه ازمعادلهٔ (۲) دیده می‌شود، یك‌بستگی‌تصویری را بین این‌دو دسته مشخص می‌کند.

در نتیجه، دسته نیم‌خطهای S و S'، یك‌مقطع مخروطی K_1 را معین می‌کنند. منحنی K_1، منحنی K را در چهارنقطه قطع می‌کندکــه همــان نقطه‌های مضاعف مجهول هستند (درتناظر دوارزشی بین نقطه‌های دوردیف ξ و η روی K).

e) برای پیدا کردن K_1، به‌این ترتیب عمل می‌کنیم: در معادلهٔ (۲)، به‌جای η'، عدد معینی و مثلاً ٥ قرار می‌دهیم. از این طریق، دو مقدار ξ' و ξ'' به‌دست می‌آید. خط راست s، که دو نقطهٔ ξ' و ξ'' را به‌هم وصل می‌کند، نیم‌خطی از دستهٔ S است. اکنون ξ' را در معادله می‌گذاریم و از آن‌جا η'' را به‌دست می‌آوریم.

از وصل نقطه‌های η' و η'' به‌یکدیگر، نیم‌خط متناظر s' از دستهٔ S' به‌دست می‌آید. به‌همین ترتیب، دو نیم‌خط دیگر از S و، سپس، نیم‌خط‌های متناظر آن‌ها را در S' پیدا می‌کنیم.

f) به‌این ترتیب، توانستیم، معادلهٔ درجهٔ چهارم را، در حالت کلی خود، به‌کمك یك مقطع مخروطی مفروض، حل کنیم.

نقطه‌های برخورد K و K_1 را می‌توان بارسم منحنی K_1 بانقطه‌یابی به‌دست آورد و یا به‌طریقی که در زیر نشان می‌دهیم، عمل کرد.

۴. نتیجهٔ کارهای کورتوم وسمیت دربارهٔ حل مسأله‌های ساختمانی درجه سوم ودرجه چهارم

کورتوم و سمیت، در نوشته‌های خود، که در سال ۱۸۶۶ جایزهٔ شتینر را از فرهنگستان برلین برده‌اند، ثابت کردند که، هر مسأله هندسی درجه سوم و درجه چهارم را می‌توان بارسم دایره و خط راست حل کرد، به‌شرطی که یك مقطع مخروطی (غیر از دایره) درصفحهٔ شکل مفروض باشد.

برای کوتاه کردن بحث، به‌شرح این کارها نمی‌پردازیم و تنها به‌چند نکته اشاره می‌کنیم.

این دو نوشته، ارزش نظری والایی دارند، زیرا آن‌ها را می‌توان ادامهٔ مستقیم بررسی‌های شتینر دانست. شتینر ثابت کرد (فصل دوم را ببینید) که همهٔ ساختمان‌های درجه دوم‌را می‌توان بارسم‌خط‌های راست انجام‌داد، به‌شرطی که دایره‌ای همراه با مرکز آن در صفحهٔ شکل داده شده باشد. به‌این ترتیب‌شتینرتوانست ابزارهای لازم برای حل مسأله‌های درجه دوم را، به‌حداقل خود برساند.

ولی می‌دانیم که برای حل مسأله‌های درجه سوم و درجه چهارم، تنها

وجود دایره‌ها کفایت نمی‌کند، زیرا از برخورد دایره‌ها، تنها می‌توان به‌معادلهٔ درجهٔ دوم رسید.

برای حل چنین مسأله‌هایی، به مقطع‌های مخروطی ویا منحنی‌های از درجه‌های بالاتر نیاز است و، دوباره، این‌پرسش پیش می‌آید که:ساده‌ترین وکمترین تعداد منحنی‌های لازم برای این منظور، کدام‌اند؟

کورتوم و سمیت ثابت‌کردند که، تنها وجود یك‌مقطع مخروطی، برای حل هرمسألهٔ درجهٔ سوم یا درجهٔ چهارم، کافی است. و ما در بخش قبلی به‌این مسأله پرداختیم.

مقطع مخروطی مفروض K، و مقطع مخروطی دوم $K_۱$، با پنج نقطهٔ آن‌ها (یا با دو دسته نیم‌خط تصویری) داده می‌شوند؛ مجهول عبارت است از نقطه‌های برخورد این دو منحنی. برای این منظور، لازم‌نیست منحنی $K_۱$ را به‌کمك نقطه‌های آن بسازیم. بنا براستدلال‌های کورتوم و سمیت، می‌توان این نقطه‌های برخورد را به‌کمك مقطع مخروطی مفروض و رسم دایره‌ها و خط‌های راست به‌دست آورد.

با وجود این، در چند صفحهٔ قبل، ثابت‌کردیم‌که هرمسألهٔ درجه سوم و درجه چهارم را می‌توان با پرگار و خط‌کش، تنها به کمك یك مقطع مخروطی حل کرد.

در آن‌جا، سهمی P، هیچ‌ربطی به‌معادله درجه‌چهارم مفروض‌نداشت و حل معادله، منجر به‌این می‌شدکه دایره‌ها وخط‌های راستی را به‌سهمی P اضافه‌کنیم.

§۴۸. حل معادلهٔ درجه سوم، به‌کمك دوزاویهٔ قائمه

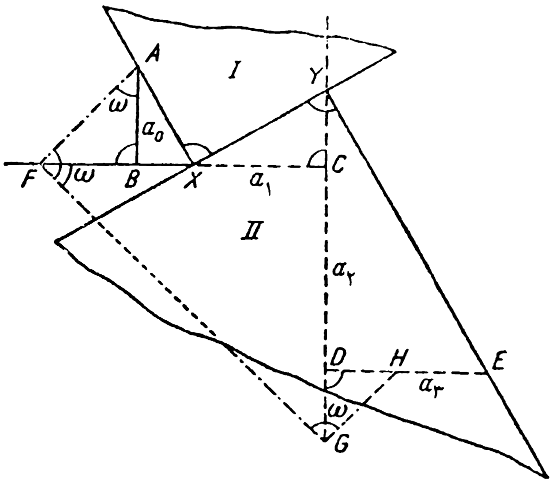
۱. این معادله مفروض است:

$$a_۰x^۳+a_۱x^۲+a_۲x+a_۳=۰ \qquad (۱)$$

که درآن، $a_۰$، $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$، عددهایی گویا هستند.

خط شکستهٔ قائم‌الزاویهٔ $ABCDE$ را رسم می‌کنیم، به‌نحوی‌که طول

ضلع‌های آن، به‌ترتیب، برابر a_0، a_1، a_2 و a_3 باشند. دوضلع اول a_0وa_1 برهم عمودند، ولی وضع قرار گرفتن آن‌ها، می‌تواند دلخواه باشد. برای ضلع‌های بعدی، باید این قاعده را رعایت کرد.



شکل ۱۵۶

هردو ضلع موازی از خط‌شکسته، در یک جهت یا در جهت‌های مختلف‌اند، بسته به این‌که ضریب‌های متناظر آن‌ها در معادله، علامت‌هایی مخالف یا یکسان داشته باشند.

در شکل ۱۵۶، پاره‌خط‌های AB و CD در یک جهت‌اند، بنابراین a_0 و a_2، علامت‌های مختلفی‌دارند. به‌همین ترتیب، پاره‌خط‌های BCوDE نیز هم‌جهت‌اند؛ یعنی ضریب‌های a_1 و a_3، علامت‌های مختلف دارند.

خط شکستهٔ $ABCDE$ را، خط شکستهٔ سمت‌چپ معادله می‌نامند.

از این‌جا به‌بعد، برای مشخص بودن وضع، ضریب‌های a_0 و a_1 را مثبت می‌گیریم، در این‌صورت، a_2 و a_3 باید، با توجه به‌شکل، منفی باشند.

۲. زاویهٔ دلخواه ω را به‌رأس A می‌سازیم (شکل ۱۵۶) وخط‌شکستهٔ جدید $AFGH$ را رسم می‌کنیم. در این‌صورت، اگر فرض کنیم $x = tg\omega$، خواهیم داشت:

$$\overline{FB}=a_0 tg\,\omega=a_0 x,$$
$$\overline{FC}=a_0 x+a_1,$$
$$\overline{CG}=(a_0 x+a_1)x,$$
$$\overline{DG}=a_0 x^2+a_1 x+a_2$$

(a_2، عددی منفی است). سرانجام

$$\overline{EH}=a_0 x^3+a_1 x^2+a_2 x+a_3$$

اگر نقطهٔ H بر E منطبق باشد، آن‌وقت

$$\overline{EH}=0$$

به‌نحوی که

$$tg\,\omega=x$$

ریشهٔ معادلهٔ مفروض خواهد بود.

از آن‌چه گفتیم، روش حل معادلهٔ (۱) روشن می‌شود: باید زاویهٔ ω را طوری پیدا کرد که خط شکستهٔ $AFGH$ در E ختم شود.

چنین خط شکستهٔ حلالی را می‌توان بـه‌سادگی و به کمك دو مثلث قـائم‌الزاویهٔ I و II (شکل ۱۵۶)، همـان‌طور که در شکل نشان داده شده است، به‌دست آورد.

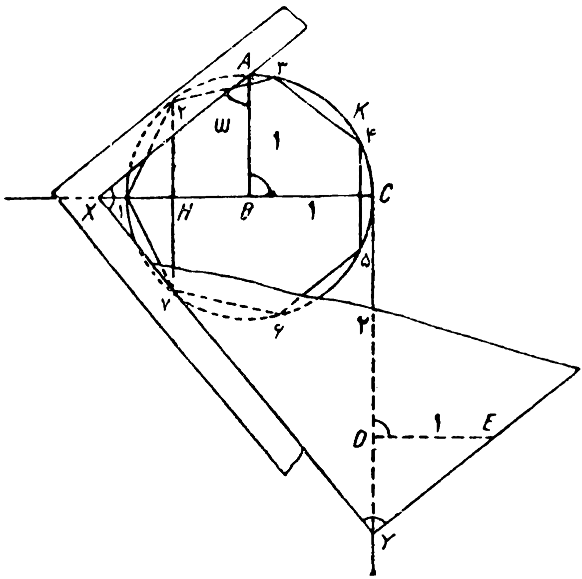
به‌جای یکی از مثلث‌های قائم‌الزاویه، می‌توان از زاویهٔ قائمه‌استفاده کرد، همان‌طور که در شکل ۱۵۷ نشان داده شده است.[۱۲۳]

۳. وقتی به کمك دو مثلث قـائم‌الزاویه، خط شکستهٔ حلال پیدا شد، باید بررسی کرد که از $+tg\omega$ و $-tg\omega$ کدام‌یك در معادله صدق می‌کنند، یعنی باید روشن کرد که جهت مثبت زاویهٔ ω را چگونه باید در نظر گرفت. در این مورد می‌توان قاعدهٔ کلی پیدا کرد، ولی بهتر است درهر موردخاص تحقیق کرد که آیا جواب حاصل x، باید مثبت باشد یا منفی.

در حالت $a_0=1$، ریشهٔ x با پاره‌خط XB بیان می‌شود.

یادداشت. به ایـن ترتیب، نشان دادیم که چگونه می‌توان به‌کمك دو زاویهٔ‌قائمهٔ، هرمعادلهٔ درجه‌سوم ـ ودرنتیجه، هرمعادلهٔ چهارم ـ را حل کرد! راه‌حل دقیق است و نباید آن‌را تقریبی به‌حساب‌آورد (§ ۲۲).

بنابراین، زاویهٔ قائمه را باید ابزاری نیرومندتر ازابزارهای‌معمولی به‌حساب آورد، زاویهٔ قائمه از پرگار نیرومندتر است، زیرا با چند پرگار



شکل ۱۵۷

نمی‌توان معادله‌ای را که از درجهٔ دوم بالاتر است، حل کرد.

در رسم، اغلب پیش می‌آید که به‌حل معادله‌ای درجه سوم یا درجهٔ چهارم نیاز پیدا می‌کنیم. برای حل دقیق این‌مسأله‌ها، باید علاوه برابزارهای معمولی، از وسیلهٔ بغرنج‌تری، ومثلاً سهمی $y^2+x=0$ هم استفاده کرد. ولی با آن‌چه در این‌جا گفتیم، معلوم می‌شود که به چنین وسیله‌های بغرنج‌تر، هیچ‌گونه نیازی نیست.

§ ۴۹. رسم هفت‌ضلعی و نه ضلعی منتظم به‌کمك دو زاویهٔ قائمه

۱. رسم هفت‌ضلعی منتظم

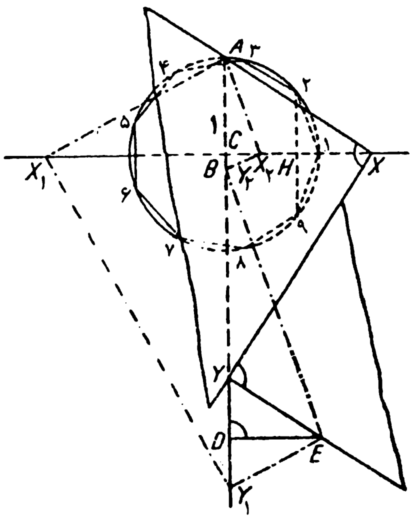
برای رسم هفت‌ضلعی منتظم، باید جواب‌های معادلهٔ زیر را پیدا کرد

(§۴۲، ۱):

$$y^{3}+y^{2}-2y-1=0 \qquad (1)$$

خط شکستهٔ $ABCDE$ (شکل ۱۵۷)، معرف معـادلهٔ (۱) را رسم می‌کنیم و خط شکستهٔ حلال $AXYE$ آن‌را می‌سازیم. در این صورت

$$\overline{XB}=y$$



شکل۱۵۸

سپس، نقطهٔ H وسط پـاره‌خط XB را پیدا (§۴۲، ۱) و از H عمودی بر آن اخراج می‌کنیم. این عمود، دایرهٔ K را در رأس‌های ۲ و ۷ از هفت‌ضلعی منتظم محاطی قطع می‌کند (شکل ۱۵۷).

۲. رسم نه‌ضلعی منتظم

رسم نه‌ضلعی منتظم، بستگی به‌حل معادلهٔ زیر دارد (§۴۲، ۲):

$$y^{3}-3y+1=0 \qquad (2)$$

همان‌طور که می‌دانیم، این معادله، دو ریشهٔ مثبت و یک‌ریشهٔ منفی‌دارد؛

در ضمن ریشهٔ مثبت بزرگتر چنین است:

$$y = ۲\cos\frac{۲\pi}{۹} > ۱$$

برای حل معادلهٔ (۲)، خط شکستهٔ $ABCDE$ و خط شکستهٔ حلال $AXYE$ را رسم می‌کنیم (شکل ۱۵۸)، در ضمن

$$y = \overline{BX} > ۱$$

اگر ازنقطهٔ H وسط پاره‌خط BX، عمودی بر BX اخراج کنیم، رأس‌های ۲ و ۹ از نه ضلعی منتظم محاط در دایره به‌دست می‌آید (شکل ۱۵۸).

§۵۰. مساله‌های مجسم درجه سوم و درجه چهارم

این مساله‌ها، شامل هیچ اندازه‌ای نیستند، بنابراین، اگر بخواهیم آن‌ها را به‌کمك محاسبه حل کنیم، می‌توان بدون تغییر در بیان صورت مساله، آن را برصفحهٔ دلخواهی تصویر کنیم و خود را به‌معادله‌ای درجه سوم یا چهارم برسانیم.

در هندسهٔ جدید، بسیاری از مساله‌های مجسم درجه سوم و درجه چهارم شناخته شده‌اند. اساس مساله‌های درجه چهارم، چنین است:

دو مقطع مخروطی، هرکدام به‌وسیلهٔ پنج عنصر خود، داده شده‌اند. می‌خواهیم نقطه‌های برخورد آن‌ها را پیدا کنیم.

می‌دانیم که این مساله را می‌توان به‌یك مسالهٔ درجه سوم منجر کرد.

یك نقطهٔ مشترك دو مقطع مخروطی و، به جز آن، چهار نقطه از هر مقطع مخروطی داده شده است. می‌خواهیم سه‌نقطهٔ مشترك دیگر مقطع‌های مخروطی را پیدا کنیم.

و مسالهٔ اخیر، اساس مساله‌های درجه سوم را تشکیل می‌دهد.

هرمسالهٔ مجسم درجه سوم و درجه چهارم را می‌توان منجر به این دو مساله کرد.

مسالهٔ مهم درجه سوم عبارت است از نقطه‌های مضاعف هم راستا در

صفحه، وقتی که به‌وسیلهٔ چهار زوج نقطهٔ متناظر داده شده باشد؛ این مساله را می‌توان به‌مسالهٔ اساسی منجر کرد.

یك مسالهٔ درجه سوم، دست‌کم یك جواب وحداکثر سه جواب دارد زیرا هرمعادلهٔ درجه سوم، یك یا سه جواب حقیقی دارد.

نتیجه‌گیری‌های کورتوم و سمیت را در مورد معادله‌های درجه سوم و چهارم مجسم هم می‌توان به‌کار برد. با وجود این، برای پرهیـز از تفصیل مطلب، در این‌جا به‌آن نمی‌پردازیم.

فصل نهم

یادداشت‌های تاریخی دربارهٔ تربیع دایره
راه حل تقریبی مساله: روش بالا بردن دقت رسم

§ ۵۱. یادداشت‌های تاریخی دربارهٔ تربیع دایره

۱. تربیع دایره، یعنی رسم مربعی که مساحت آن برابر با مساحت دایرهٔ مفروض باشد.

برای پیدا کردن این مربع، باید مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کرد که قاعدهٔ آن برابر با نصف محیط دایره و ارتفاع آن برابر با شعاع دایره باشد و، سپس، این مثلث قائم‌الزاویه را به‌مربع هم‌ارز خود تبدیل کرد.

به‌این ترتیب، مساله منجر به‌رسم نیمی از محیط دایره، یعنی تبدیل نیم‌دایره به خط راست، می‌شود. اگر شعاع دایره برابر ۱ باشد، طول نیم‌دایره برابر π می‌شود. بنابراین، مساله سرآخر، منجر بـه‌رسم پاره‌خطی می‌شود که طول آن، دقیقاً، برابر π باشد.

حل این مساله، از زمانهای قدیم، مطرح بوده است. حتی در پاپیروس ریند (۲۰۰۰ سال پیش از میلاد)، مسالهٔ مربوط به‌تبدیل دایره به‌مربع هم‌ارز آن مطرح شده و، برای حل آن، قاعدهٔ زیر داده شده است:

«ضلع مربع را بایـد برابر با $\frac{۸}{۹}$ قطر دایره گرفت.»

چون $$\frac{۸}{۹}d=\frac{۱۶}{۹}r \text{ و } \left(\frac{۱۶}{۹}\right)^{۲}=۳/۱۶$$

می‌بینید که این قاعده، چندان هم غیردقیق نیست و، به‌خصوص برای تقسیم زمین‌ها و اندازه‌گیری‌ها روی زمین، به‌خوبی قابل استفاده است.

در بین یونانی‌ها، مسالهٔ تربیع دایره وهمراه با آن محاسبهٔ عدد π، همیشه مطرح بوده است. ارشمیدس، عدد π را به کمك چندضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی پیدا کرده است. هیوگنس (*Huyghens*) هم از همین روش پیروی کرد. تقریباً در همان زمان (سال ۱۶۰۰) رودولف وان تسی‌لن (*van Ceulen*)، عدد π را، تا ۲۰ رقم اعشار محاسبه کرد.

صدسال بعد، وقتی روش محاسبهٔ دیفرانسیلی و انتگرالی کشف شد، دستورها ورشته‌های زیادی، برای محاسبهٔ عدد π، پیدا شد.

از بین این دستورها، دستور والیس (*Wallis*) قابل توجه است:

$$\frac{\pi}{۲}=\frac{۲}{۱}\cdot\frac{۲}{۳}\cdot\frac{۴}{۳}\cdot\frac{۴}{۵}\cdot\frac{۶}{۵}\cdot\frac{۶}{۷}\cdots$$

و همچنین رشتهٔ لایب‌نیتس:

$$\frac{\pi}{۴}=۱-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۹}-\cdots$$

رشته‌هایی وجود دارد که، به‌کمك آن‌ها، می‌توان عدد π را به‌سادگی محاسبه کرد. تا زمان نوشته شدن این کتاب، توانسته‌اند عدد π را تا ۷۰۰ رقم اعشار محاسبه کنند. عدد π، تا ۱۰ رقم بعد از ممیز چنین است:

$$\pi=۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵\ldots$$

لامبرت (*Lambert*) ثابت کرد که π، عددی گنگ است؛ ولژاندر (*Legendre*) گنگ بودن عدد $\pi^۲$ را هم ثابت کرد.

با وجود این، خیلی طول کشید تا در همین اواخر، چهرهٔ واقعی عدد π روشن شد وهمراه با آن، مسالهٔ مربوط به تربیع دایره، به‌طول کامل مورد تجزیه وتحلیل قرار گرفت.

۲. عددها را می‌توان به دودستهٔ عددهای جبری و عددهای غیرجبری تقسیم کرد. عددی را جبری گویند که بتواند ریشهٔ معادله‌ای با ضریب‌های

گویا باشد. وقتی که‌عددی نتواندریشهٔ چنین معادله‌ای باشد،آن را غیرجبری گویند.

برای نخستین بار، درسال ۱۸۴۴، لیوویل (*Liouville*) ، وجود عددهای غیرجبری‌را ثابت کرد؛ و ژرژ کانتور (*Georg Cantor*) درتألیف اساسی خود (درسال ۱۸۷۳)، وجود عددهای غیرجبری را، با روش بسیار ساده‌ای، کشف کرد.

احتمال این‌که، عدد π، از این گونه عددها باشد، زیاد بود. هرمیت (*Hermite*) درسال ۱۸۷۳، غیرجبری بودن عدد e را ثابت کرد و، سپس، لیندمان (*Lindemann*)، براساس کارهای هرمیت، توانست درسال ۱۸۸۲، غیر جبری بودن عدد π را هم ثابت کند.

استدلال لیندمان را ابتدا ویرشتراس (*Weierstrass*) و سپس، هیلبرت، هورویتس (*Hurwitz*) و جوردانو ساده‌تر کردند، به نحوی که در زمان ما می‌توان غیرجبری‌بودن عدد π را، باروش‌های کاملاً مقدماتی ثابت کرد.[۱۲۴]

این تلاش‌ها، توانست مسالهٔ مربوط به تربیع دایره را به‌پایان برساند و ثابت کندکه این مساله، قابل حل نیست. در واقع ثابت شدکه، نه تنها به‌کمك پرگار و خط‌کش، بلکه حتی به‌کمك پرگار بیضی نگار، پرگار کنکوئید نگار و به‌طورکلی با وسیله‌هایی‌که می‌توانند منحنی‌های جبری را رسم‌کنند، نمی‌توان پاره‌خطی برابر با نصف محیط دایره رسم‌کرد.

حل مسالهٔ تربیع دایره، تنها به‌کمك ابزارهایی ممکن است‌که بتوانند منحنی‌های غیرجبری را رسم‌کنند.

می‌توان دستگاه‌هایی درست‌کردکه، به‌کمك آن‌ها، بتوان منحنی‌های غیرجبری (و مثلاً $y=arc\ sinx$) وهمراه با آن، π را رسم‌کرد.

دستگاهی که برای این‌منظور، و منظورهای دیگر، به‌کار‌می‌رود، به‌دستگاه آبدانك ــ آباکانوویچ معرف است. به‌کمك این وسیله، می‌توان با مفروض‌بودن منحنی

$$y=f(x)$$

منحنی انتگرال آن، یعنی

$$v = \int f(x)dx$$

را رسم کرد.

۵۲§. راست کردن تقریبی محیط دایره

درعمل، باید به روش‌هایی دسترسی داشت تا، به کمك آن‌ها، بتوان پاره‌خطی رسم کرد که به‌تقریب برابر با طول محیط دایرهٔ مفروض باشد.

ازاین گونه روش‌ها، به‌فراوانی وجود دارد. در این‌جا، از مهم‌ترین آن‌ها یاد می‌کنیم و، قبل از آن، دربارهٔ نکته‌ای به‌صحبت می‌پردازیم.

۱. دربارهٔ دقت رسم.

a) هیچ کدام از ابزارهایی که برای رسم به‌کار می‌روند، کامل نیستند. ضمن‌قراردادن سوزن پرگاردرنقطهٔ مفروض، ضمن قراردادن خط کش درکنار نقطهٔ مفروض وضمن رسم دایره یـا خط‌راست، اشتباه‌هایی در رسم رخ می‌دهد، ولو این‌که کار را با حوصله و دقت بسیار انجام دهیم.

باید توجه‌داشت کـه، ضمن رسم دایـره، نسبت به‌وقتی‌که خط‌راست را رسم می‌کنیم، خطای کمتری پیش می‌آید. خط کش را نمی‌توان، درتمامی امتداد خود، خط‌راست ایده‌آل به‌حساب‌آورد، به‌جزآن، نوك قلم که درکنار خط کش حرکت وخط‌راست رارسم می‌کند، همه‌جا با فاصله‌ای ثابت نسبت به‌خط کش باقی نمی‌ماند، زیرا اولاً قلم، ولو به اندازهٔ جزئی، ازخط کش دورویا به‌آن‌نزدیك می‌شود، ثانیاً درزمان رسم خط‌راست، دورمحورخودش می‌چرخد.

b) هرنقطه، در محل برخورد دو خط‌راست مشخص می‌شود؛ ولی هر کدام ازاین خطهای راست ضخامتی دارند، به‌نحوی‌که نقطهٔ موردنظر، در داخل متوازی‌الاضلاعی قرارمی‌گیرد که‌می‌توان‌آن را لوزی به‌حساب‌آورد. بنابراین، برای قراردادن خط کش‌در کنار‌این نقطه ویا گذاشتن سوزن‌پرگار درروی آن، خطای تازه‌ای پیش می‌آید.

c) می‌توان قبول کرد که، اگرضمن رسم‌پاره‌خطی به‌طول $\frac{1}{10}$ میلی‌متر،

بتوان اندازه‌ها را تشخیص داد و، بنابراین، اگر خطای حاصل از قراردادن سوزن پرگار در نقطهٔ به‌دست آمده (که یک سطح کوچک است) وضمن قراردادن خط کش درکنار این نقطه و همچنین، خطای حاصل از ضخامتی که برای خط پدید می‌آید، روی هم از ۰/۱ میلی متر تجاوز نکند، رسم دقیق به حساب آوریم.

d) در رسم، این مطلب بی‌اندازه اهمیت دارد که بتوانیم رابطهٔ خطای کلی حاصل از رسم را، باخطاهای جزئی جداگانه‌ای که ضمن رسم به‌دست آمده‌اند، پیدا کنیم و تا آن جا که ممکن است میزان خطای کلی را پایین بیاوریم و دقت رسم را بالا ببریم.

چنین بررسی‌هایی، برای نخستین‌بار و درحالت خاص خود، به‌وسیلهٔ وینر ($Chr.\ Wiener$) انجام گرفت و، سپس، فلیکس کلین، نظریـهٔ خطاها را درساختمان‌های هندسی بنیان گذاشت.

۲. از آنچه گفتیم، برای رسم‌تقریبی پاره‌خط برابر باطول محیط‌دایرهٔ مفروض، استفاده می‌کنیم.

ازآن‌جاکه نمی‌توانیم پاره‌خطی رسم‌کنیم که طول آن، دقیقاً برابربا طول محیط دایرهٔ مفروض باشد، هرروشی که برای این منظور انتخاب شود، روشی تقریبی است ونتیجهٔ حاصل، حتی اگر بـه کمك ابزارهای ایده‌آل و کامل انجام شـده باشد، بـا مقدار واقعی‌مجهول، بـه اندازهٔ پاره‌خط f_1 اختلاف دارد، که می‌توان آن را محاسبه کرد.

به‌این خطا، کـه ناشی ازروش رسم است، بایـد خطای f_2، ناشی از ابزارهای رسم را، اضافه‌کرد. بنابراین، خطای کلی f، برابر است با

$$f=f_1+f_2$$

برای این‌که‌خطای f به‌حداقل خود برسد، کافی نیست‌که تنها دربارهٔ امکان پایین آوردن f_1 بیندیشیم، بلکه بایـد ضمناً امکان‌کم کردن خطای f_2 را هم به‌حساب آوریم؛ هرچه تعداد عمل‌ها در جریان رسم بیشترباشد، مقدار خطای f_2 هم بیشترمی‌شود.

رسم‌هایی تقریبی وجود داردکه عدد π را بادقتی تا ده رقم اعشاری

می‌دهند، به‌نحوی که $f_۱$ از واحد مرتبهٔ دهم بعد از ممیز کوچکتر باشد. ولی ازآن جاکه این روش‌های رسم بسیار بغرنج است، مقدار $f_۲$ را تنها تامرتبهٔ دوم بعد از ممیز می‌توان داد. به همین مناسبت، این روش‌ها ، ارزش عملی چندانی ندارند.

روش تقریبی رسم، تنها وقتی در عمل ارزش دارد که، برای رسیدن به نتیجه، تعداد کمی عمل لازم باشد؛ درضمن کافی است، خطای $f_۱$، کمتر از ۰/۱ میلی‌متر باشد.

a) یکی از روش‌های تقریبی، که تا حد زیادی برای هدف‌های عملی کافی است، ناشی ازاین قضیه است که: طول محیط دایره، به تقریب، برابر است با $۳\frac{۱}{۷}$ قطر آن.

ازآن جا که

$$۳\frac{۱}{۷}=۳/۱۴۲۷۰۶$$

کافی است به‌آن اضافه‌کنیم:

$$f_۱=-۰/۰۰۱۲$$

تا به‌دست آید:

$$\pi=۳/۱۴۱۵$$

اگر طول قطر دایره برابر ۱۰ سانتی‌متر باشد، $f_۱$ به‌تقریب برابر $\frac{۱}{۸}$ میلی‌متر می‌شود، به‌نحوی که این رسم، برای دایره‌های با شعاع کمتر از ۵ سانتی‌متر، کاملاً قابل قبول است.

b) روش مناسب برای راست کردن کمان دایره، از راه قراردادن وترهای کوچك برابر، در طول کمان و روی خط راست، به‌دست می‌آید.

در این‌جا هم باید به‌دوخطا توجه داشت: خطای نظری $f_۱$ که ناشی از اختلاف بین‌کمان‌ها و وترهاست، و خطای $f_۲$ ناشی از رسم که به‌نقص

کار انتقال پاره‌خط‌ها مربوط است و با زیادشدن تعداد عمل‌ها، میزان آن بالاتر می‌رود.

به‌هیچ‌وجه نباید از پاره‌خط‌های بسیار کوچك استفاده کرد. مثلاً برای دایره‌ای با شعاع برابر ۵ سانتی‌متر، باید از وترهایی به‌طول تقریبی ۵ میلی‌متر استفاده کرد، یعنی وترهایی که بتوان آن‌ها را ۲۰ تا ۲۵ بار روی محیط دایره قرارداد.

c) به جز این روش‌های تقریبی، روش ساختمانی جالبی هم وجود دارد که، به‌کمك آن‌ها، می‌توان مستقیماً پاره‌خطی برابر با محیط دایره یا نصف ویا ربع آن به‌دست‌آورد.

ابتدا از روش رسم ماسکه‌رونی (§ ۲۰) یاد می‌کنیم. این روش به‌ما امکان می‌دهدتا،تنها به‌کمك پرگار،پاره‌خط s را به‌طولی برابر ۱/۵۷۱۱۹۹۶ ساخت، یعنی پاره‌خطی که به‌تقریب برابر با ربع محیط دایره است:

$$\frac{\pi}{۲}=۱/۵۷۰۷۹۶۳$$

در این روش، اشتباه نظری $f_۱$، برابر $\frac{۴}{۱۰۰۰۰}$ است و، بنابراین، برای رسم دایره‌هایی با شعاع کمتر از ۵۰ سانتی‌متر مناسب است.

از آن‌جاکه این ساختمان را می‌توان، تا آخر، تنها به کمك پرگار انجام داد، باید آن‌را در شمار بهترین روش‌ها، برای راست کردن محیط دایره، به‌حساب‌آورد.

d) شپخت ($Specht$) روشی دارد، که به نتیجهٔ کاملاً دقیقی منجر می‌شود.

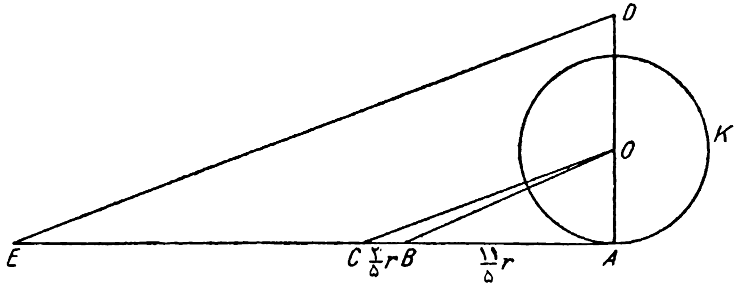
دایرهٔ K را به‌مرکز O و شعاع r در نظر می‌گیریم. شعاع OA (شکل ۱۵۹) و مماس بردایره در نقطهٔ A را رسم می‌کنیم؛ سپس، نقطه‌های B و C را روی این مماس طوری پیدا می‌کنیم که داشته باشیم:

$$\overline{AB}=\frac{۱۱}{۵}r ، \overline{BC}=\frac{۲}{۵}r$$

بعد، روی قطر OA ، نقطهٔ D را طوری پیدا می‌کنیم که، برای آن، داشته باشیم:

$$\overline{AD}=\overline{OB}$$

و از نقطهٔ D، خط راستی موازی با OC رسم می‌کنیم.



شکل ۱۵۹

طول پاره‌خط AE، به‌تقریب برابر است با طول محیط دایره؛ زیرا

$$\overline{OB}=\frac{r}{۵}\sqrt{۱۴۶}\text{، }\overline{AC}=\frac{۱۳}{۵}r$$

و بنابراین

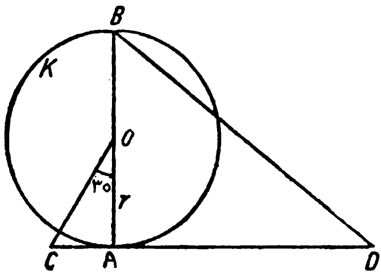
$$\overline{AE}=\frac{۱۳r}{۲۵}\sqrt{۱۴۶}=r\times ۶/۲۸۳۱۸۴$$

از طرف دیگر، محیط دایره برابر است با

$$u=r\times ۶/۲۸۳۱۸۵$$

به‌این ترتیب، خطـای نظری $f_۱$ برابر $\frac{r}{۱۰^۶}$ است. ایـن ، روشی بسیار دقیق‌است ومیزان خطای نظری $f_۱$، برای دایره‌ای به‌شعاع ۱۰۰متر، برابر $\frac{۱}{۱۰}$ میلی‌متر می‌شود.

e) روش دیگری برای رسم سادهٔ تقریبی



شکل ۱۶۰

K را دایره‌ای می‌گیریم کــه می‌خواهیم محیط آن‌را به‌صورت یك پاره‌خط‌راست درآوریم و AB را قطری از آن فرض می‌کنیم (شکل ۱۶۰).

ازنقطهٔ A مماسی بردایره رسم ونقطهٔ C را روی آن طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم:

$$\widehat{COA} = ۳۰^\circ$$

سپس، نقطهٔ D را روی خط مماس، با شرط

$$\overline{CD} = ۳r$$

انتخاب می‌کنیم. BD به‌تقریب برابر با نصف محیط دایره خواهد بود. در واقع، داریم:

$$\overline{AC} = \frac{r}{۳}\sqrt{۳}$$

وبنابراین

$$\overline{AD} = ۳\,r - \frac{r}{۳}\sqrt{۳}$$

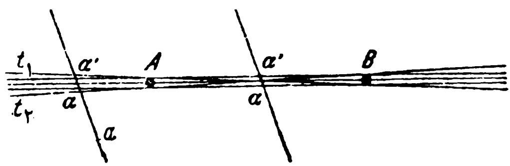
و در نتیجه

$$\overline{BD} = r\sqrt{۴ + \frac{(۹ - \sqrt{۳})^۲}{۹}} = \frac{r}{۳}\sqrt{۱۲۰ - ۸۰\sqrt{۳}} =$$
$$= r \times ۳/۱۴۱۵۳۳$$

به این ترتیب، خطای نظری f_1 برابر $\frac{6}{100000}r$ است، به‌نحوی که این خطا، برای دایره‌ای به‌شعاع ۲ متر ، برابر $\frac{1}{10}$ میلی‌متر می‌شود.

§۵۳. قاعده‌هایی برای بالا بردن دقت رسم

۱. فرض کنیم دو نقطهٔ A و B، ضمن یك ساختمان هندسی به‌دست آمده‌اند و می‌خواهیم آن‌ها را به‌وسیلهٔ خط راست g به‌هم وصل کنیم (شکل ۱۶۱)؛ در ضمن، هریك از نقطه‌های A و B، به‌عنوان نقطهٔ برخورد دو خط راست با ضخامت‌های یکسان داده شده‌اند.



شکل ۱۶۱

بنابراین، هریك از این دو نقطه ، در درون حوزه‌ای قرار دارند که آن‌ها را می‌توان، به‌خاطر هدفی که دنبال می‌کنیم، دایره به‌حساب آورد.

وقتی که خط‌کش را کنار این دو نقطه قرار دهیم، می‌توان آن‌را در حد قطر هریك از این نقطه‌ها (دایره‌ها) لغزاند و، بنابراین، نه یك بلکه بی‌نهایت خط راست، می‌توان رسم کرد؛ خط‌راستی که دونقطه را به‌هم‌وصل می‌کند، در بخش اعظم خود، محدود به‌حوزهٔ بین دو مماس t_1 و t_2 است که می‌توان آن‌را نواری به‌عرض ۰/۱ میلی‌متر به‌حساب آورد.

نقطهٔ برخورد خط‌راست دیگر a باخط راست g، در داخل پاره‌خط $\alpha\alpha'$ قرار دارد (به‌شرطی که خط راست a را، برای یك لحظه، بی‌نهایت نازك به‌حساب آوریم).

براساس آن‌چه گفتیم، می‌توان دو قاعدهٔ زیر را، برای دقیق‌تر کردن رسم، در نظر داشت.

a) اگر بخواهیم خط راست g ، در تمامی امتداد خود، حداکثر دقت ممکن را داشته باشد، باید تاآن‌جاکه ممکن است، نقطه‌های A و B را با فاصلهٔ بیشتری نسبت به‌هم انتخاب‌کنیم.

b) اگر بخواهیم نقطهٔ S، محل برخورد خط‌های راست g و a را، تا حد امکان، دقیق‌تر پیداکنیم، باید این‌خط‌های راست‌را به‌وسیلهٔ نقطه‌هایی معین‌کنیم‌که، تاحد امکان، به‌نقطهٔ مجهول S نزدیك‌تر باشند.

۲. فرض‌کنید دو خط راست g_1 و g_2 را رسم‌کرده باشیم؛ S، نقطهٔ برخورد آن‌ها در داخل یك لوزی قرار دارد که پهنای آن برابر با پهنای خط‌های رسم شده است.

اگر خط‌های راست برهم عمود باشند ، این لوزی تبدیل به‌مربع می‌شود؛ اگر دوخط راست تحت زاویهٔ حادهٔ‌کوچکی یکدیگررا قطع‌کرده باشند، این لوزی به‌صورت‌کشیده‌ای درمی‌آید.

اگر بخواهیم این نقطه را به‌نقطهٔ دیگری مثل P وصل‌کنیم، برای هرنقطهٔ دلخواه P، وقتی این خط راست دقیق‌تر می‌شودکه زاویهٔ بین g_1 و g_2 به‌زاویهٔ قائمهٔ نزدیك‌تر باشد. برعکس اگر زاویهٔ بین g_1 و g_2، زاویهٔ حادهٔ‌کوچکی باشد، خط راست PS وقتی دقیق می‌شود که در داخل زاویهٔ حاده قرار داشته باشد.

از این‌جا قاعدهٔ دیگری به‌دست می‌آیدکه، در رسم‌های دقیق، باید به‌آن توجه داشت.

c) اگر S، نقطهٔ برخورد خط‌های راست g_1 و g_2، برای تعیین دقیق خط‌های راست بعدی لازم است، باید دوخط راست g_1 و g_2 تحت‌زاویه‌ای به‌هم برسندکه با زاویهٔ قائمه اختلاف‌کمی داشته باشد. ازدو خط راست g_1 و g_2 هم، که یکدیگر را با زاویهٔ حاده قطع‌کرده‌اند، می‌توان برای رسم دقیق خط‌های‌راست بعدی‌استفاده‌کرد، به‌شرطی‌که‌خط‌های راست اخیر،زاویه‌های کوچکی‌با g_1 و g_2 بسازند.

به‌این قاعده‌ها، باید قاعدهٔ زیر را هم اضافه‌کرد:

d) باید ساختمان‌ها را با پرگارهایی انجام‌دادکه زاویهٔ بین دو میلهٔ

آن کمتر از ۶۰ درجه باشد، زیرا بـا بزرگتر شدن زاویهٔ بین دو میلهٔ پرگار، دقت کارکمتر می‌شود.

۳. به‌عنوان مثال، فرض‌کنید بخواهیم پاره‌خط AB را نصف کنیم. پاره‌خطی بزرگتر از $\frac{1}{2}\overline{AB}$، ولی نه‌چندان بزرگتر، انتخاب می‌کنیم؛ سپس به‌هریك از مرکزهای A و B و به شعاع این پـاره‌خط، دایره‌هـایی رسم می‌کنیم. بعد نقطه‌های S_1 و S_2، برخورد دودایره را به‌هم‌وصل‌می‌کنیم.

نقطه‌های S_1 و S_2 به‌هم نزدیك‌اند، بنابراین، خط راستی‌که آن‌ها را به‌هم وصل می‌کند، در امتداد خـود چندان دقیق نیست؛ ولی نقطهٔ برخورد آن با پاره‌خط AB، با دقت‌کامل به‌دست می‌آید (قاعده‌های b و c).

فصل دهم

خوش‌رسمی

§۵۴. فرض‌های لوموان (*Lemoine*)

۱. در پایان فصل قبل از برخی قاعده‌ها، برای انجام دقیق‌تر ساختمان‌های هندسی، یادکردیم و، قبل از آن، چند کلمه‌ای دربارهٔ احتمال اشتباه‌هایی که درعمل پیش می‌آید صحبت کردیم.

درضمن یادآوری کردیم، به‌این موضوع، که برای کار وعمل اهمیت زیادی دارد، تنها درزمان‌های اخیر توجه کرده‌اند وبا این‌که ساختمان‌های هندسی از روزگاران قدیم مطرح بوده است، به موضوع اشتباه‌های عملی ناشی ازرسم توجه نداشته‌اند.

دلیل اصلی این بی‌توجهی دراین بوده است که، هروقت استدلال منطقی مربوط به‌ساختمانی را پیدا می‌کردند، کار را تمام‌شده به‌حساب می‌آوردند؛ همین‌که یك‌مسالهٔ‌ساختمانی به‌مسالهٔ ساختمانی حل‌شده‌ای منجرمی‌شد، مطلب را پایان می‌دادند وبه خود رسم وانجام‌کامل ساختمان نمی‌پرداختند. به‌همین مناسبت، بحث دربارهٔ سادگی رسم ویا دقت آن، هیچ نقشی درحل مساله‌های هندسی نداشت.

ژاکوب شتینر نخستین کسی بودکه به‌موضوع ساختمان یك شکل هندسی درعمل توجه‌کرد وروشن‌کرد بحث نظری دربارهٔ ابزرهای رسم، با استفادهٔ عملی ازآن‌ها، دوچیز متفاوت است وباید هرمورد را به‌طور جداگانه مورد

بررسی قرار داد.

شتینر می‌گوید: «به طور شفاهی می‌گوییم، ابتدا این کار و سپس آن کار را انجام می‌دهیم؛ ولی دربارهٔ دشواری رسم‌ها و یا حتی، در بعضی موردها، ناممکن بودن آن‌ها درعمل صحبتی نمی‌کنیم و روشن نمی‌کنیم، کدام روش ساده‌تر است و کدام عمل را، که ساده‌اندیشانه و به صورت شفاهی بیان می‌کنیم، می‌توان ساده‌تر ودقیق‌ترانجام داد. باید درجست‌وجوی روش‌هایی بود که بتوان، به‌کمک آن‌ها، مساله‌های هندسی را، چه به‌طور نظری و چه‌درعمل، ساده‌تر ودقیق‌تر حل کرد».

بخشی ازاین جست‌وجو را انجام داده‌ایم؛ به‌نظریهٔ ابزارهای رسم، در فصل‌های قبل به‌این مطلب پرداختیم که، چه مساله‌هایی را می‌توان به‌کمک تنها یك‌پرگار، تنهایك خط‌کش وتنها یك زاویهٔ قائمه حل کرد.

واکنون، دراین‌فصل، به‌مسالهٔسادگی‌ساختمان‌های‌هندسی می‌پردازیم.

۲. فرض‌کنیم یك مسالهٔ ساختمانی هندسه را بتوان با روش‌های مختلف حل‌کرد؛ باید به‌این پرسش پاسخ دهیم که: کدام یك ازاین روش‌ها، ساده‌تر است؟

به‌این پرسش، می‌توان بلافاصله پاسخ داد: روشی ساده‌تر است که، ضمن استفادهٔ ازآن، به‌رسم تعدادکمتری خط نیازباشد.

اغلب می‌توان درعمل روشن‌کردکه، ضمن استفاده از یك روش برای حل مساله، چند دایره یا خط راست باید رسم‌کرد.

ولی لوموان (*Lemoine*) کمی دورترمی‌رود؛ او نه‌تنها تعدادخط‌هایی را که باید رسم شوند، محاسبه می‌کند، بلکه درضمن به‌محاسبهٔ عمل‌هایی می‌پردازدکه برای تدارك رسم این خط‌ها لازم است: چند بارباید خط‌کش رادرکنار نقطه‌ای قراردادوچندبارباید سوزن پرگاررا روی نقطه‌ای گذاشت؟

او برای انجام عمل‌های ساختمانی، به کمك پرگار و خط‌کش، چهار عمل مقدماتی را می‌پذیرد.

۱) قراردادن خط‌کش درکنار یك نقطه.

لوموان این عمل را R_1 می‌نامد وبه‌صورت

$$(R_1) : \text{عمل}$$

نشان می‌دهد. بنابراین، اگر بخواهیم خط کش را درکنار دونقطه قراردهیم، با نماد زیر سروکار داریم:

$$(۲R_۱): \text{عمل}$$

۲) قرار دادن سوزن پرگار درنقطهٔ مفروض یا درنقطهٔ دلخواهی ازخط راست مفروض.

او، این عمل را بانماد

$$(C_۱): \text{عمل}$$

نشان می‌دهد. بنابراین، درحالتی‌که هر دو سرپرگار باید بر دونقطهٔ مفروض قرارگیرند، بااین نماد سروکار داریم:

$$(۲C_۱): \text{عمل}$$

۳) رسم خط راست به‌کمك خط‌کش.

نماد این عمل، چنین است:

$$(R_۲): \text{عمل}$$

۴) رسم دایره باکمانی از دایره : $(C_۲)$: عمل

به‌این‌ترتیب، برای‌حل هرمسالهٔ ساختمانی‌هندسی، به‌عبارتی به‌صورت زیر می‌رسیم:

$$l_۱R_۱+l_۲R_۲+m_۱C_۱+m_۲C_۲$$

که لوموان آن را نماد ساختمان می‌نامد.

به‌جز این، لوموان، این مجموع‌ها را تشکیل می‌دهد:

$$l_۱+l_۲+m_۱+m_۲=S،$$

$$l_۱+m_۱=E$$

و عدد S (*Simplicité*) را ضریب سادگی و عدد E (*Exactitude*) را ضریب دقت ساختمان می‌نامد.

۳. فرض‌های لوموان را روی مساله‌ای روشن می‌کنیم.

زاویه‌ای به‌وسیلهٔ ضلع‌های آن داده شده است. می‌خواهیم نیمسازآن را رسم‌کنیم.

برای این‌منظور، معمولاً، این طور عمل می‌کنند: سوزن پرگار را در نقطهٔ O، راس زاویه، قرار می‌دهند ($\text{۱}C_{\text{۱}}$) و به‌شعاع دلخواه، دایره‌ای رسم می‌کنند ($\text{۱}C_{\text{۲}}$)، که ضلع‌های زاویه را درنقطه‌های A و B قطع می‌کند. بعد، سوزن پرگار را درنقطهٔ A قرار می‌دهند ($\text{۱}C_{\text{۱}}$) و با همان شعاع کمانی از دایره‌را رسم می‌کنند ($\text{۱}C_{\text{۲}}$)، سپس‌سوزن پرگاررا روی نقطهٔ B می‌گذارند ($\text{۱}C_{\text{۱}}$) و با همان شعاع کمانی از دایره را رسم می‌کنند ($\text{۱}C_{\text{۲}}$)؛ این دو کمان، یکدیگررا درنقطه‌ای مثل D قطع می‌کنند. سرانجام، خط‌کش راکنار نقطه‌های O و D قرار می‌دهند ($\text{۲}R_{\text{۱}}$) و خط راست OD را رسم می‌کنند ($\text{۱}R_{\text{۲}}$).

نمادی که لوموان برای این مساله درنظر می‌گیرد، چنین است:

$$\text{عمل}: (\text{۲}R_{\text{۱}}+R_{\text{۲}}+\text{۳}C_{\text{۱}}+\text{۳}C_{\text{۲}})=(\text{۹}\text{ ، }\text{۵})$$

(۱ خطراست، ۳ دایره).

نماد، تعداد همهٔ عمل‌های‌لازم را نشان می‌دهد، ولی ردیف انجام‌این عمل‌ها را معلوم نمی‌کند.

عدد ۹، معرف تعداد عمل‌های مقدماتی است که لوموان آن را ضریب سادگی ساختمان می‌نامد؛ عدد۵ نشان می‌دهد که ازعمل‌های تدارکی چندبار استفاده‌کرده‌ایم، همان چیزی که لوموان ضریب دقت ساختمان می‌نامد.

۴. لوموان، درمورد هرساختمانی، عددهای S و E و، سپس، تعداد خط‌های راست و تعداد دایره‌هایی که باید رسم کرد، محاسبه می‌کند.

اگر مساله‌ای را بتوان با روش‌های مختلف حل کرد، لوموان، روشی را خوش‌رسم می‌نامد که عدد S، برای آن، کوچکتر ازدیگران باشد.

جست‌وجوی چنین روشی برای‌حل مسالهٔ ساختمانی هندسی، موضوع اصلی بحث لوموان دربارهٔ خوش‌رسمی است.

§۵۵. بررسی انتقادی فرض‌های لوموان و تعمیم آن‌ها

۱. لوموان S، یعنی تعداد همهٔ عمل‌های مقدماتی لازم برای انجام

ساختمان مفروض‌را، ضریب سادگی می‌نامد. دراین نام‌گذاری، بنا را براین گذاشته است کــه همهٔ عمل‌های مقدماتــی، از نظر سادگی یکسان‌اند. ولی دراین‌باره عقیده‌های مختلفی وجود دارد.

مثلاً، بیشتر کسانی که‌بارسم سروکاردارند، معتقدندکه رسم‌خط‌راست، کمتر ازقراردادن خط‌کش درکنار یك نقطه، ساده‌تر است.

ولی‌تجربه نمی‌تواند مبنایی برای این تصمیم‌گیری باشدکه،کدام یك ازعمل‌های چهارگانه، ساده‌تر از دیگران‌است، به‌نحوی که‌می‌توان همراه با لوموان، همهٔ آن‌ها را یکسان به‌حساب‌آورد.

بنابراین، می‌توان قبول‌کردکه: ازدوروش راه حلی‌که برای یك‌مساله وجود دارد، روشی ساده‌تر است‌که متناظر باعدد کوچکتری برای S باشد.

۲. لوموان،عدد E، تعدادعمل‌های تدارکی، یعنی‌مجموع ضریب‌های R_1 و C_1 را، ضریب دقت ساختمان می‌ماند.

ولی این فرض را در خیلی موردها نمی‌توان تطبیق داد. این عــدد، دقت ساختمان را درارتباط با به‌کاربردن پرگار وخط‌کش و وقتی‌که‌سوزن پرگار را روی یك نقطه و یــا خط‌کش را درکنار نقطه‌ای قرار مــی‌دهیم، معین می‌کند، به‌این ترتیب، فرض براین است که تنها همین دو عمل منجــر به‌خطا در رسم می‌شوند وبقیهٔ عمل‌ها، مثل رسم‌خط‌های راست و یا دایره‌ها منجر به‌هیچ‌گونه خطائی نمی‌شوند.

ولی ما می‌دانیم‌کــه، به‌خصوص رسم یــك خط راست، به‌دلیل‌های مختلف، منجر به‌خطایــی در نتیجهٔ رسم می‌شود که حتی از خطای ناشی از قراردادن خط‌کش در کنار نقطه و یا گذاشتن سوزن پرگار روی یك نقطه، بیشتر است.

بنابراین، نمی‌توان عدد E را به‌دقت ساختمان مربوط دانست؛ ایــن عدد هیچ‌گونه ارزش عملی ندارد وما، ازاین‌به‌بعد، آن راکنار می‌گذاریم.

۳. لوموان در رابطه با رسم به‌کمك پرگار، دوعمل مختلف تدارکی درنظر می‌گیرد.

۱) قراردادن سوزن پرگار در نقطهٔ مفروض.

۲) قراردادن سوزن پرگار درنقطهٔ دلخواهی از یك خط راست.

لوموان این دو عمل تدارکی را با نمادهای مختلفی نشان داده است و ما، تنهـا به‌خاطر ساده‌تر شدن مطلب، هردوی آن‌ها را با نماد C_1 نشان دادیم.

قبلاً هم یادآوری کردیم که، از قدیم، تعداد خطهای لازم برای یك ساختمان هندسی را، معیاری برای درجهٔ سادگی آن می‌دانسته‌اند. ولی باید پذیرفت کـه تنها تلاش لوموان بود کـه علاقهٔ همگـان را به‌ایـن جنبه از ساختمان‌های هندسی جلب کرد. در واقع، وقتی که قرار باشد میزان سادگی یك راه حل را به‌کمك نمادها مشخص کنیم، به‌خودی خود، تمایل مربـوط به‌پیدا کـردن ساده‌ترین راه‌حل پیـدا می‌شود. علاوه‌براین، تأکیدی برسخن شتینر است که رسم یك‌شکل، چیزی و امکان رسم آن با حرف، چیز دیگری است.

اگر واژهٔ «سادگی» را به‌مفهومی که لوموان در نظـر دارد بگیریم، معلوم می‌شود که، راه حل‌های مساله‌های اساسی هندسهٔ مسطحه را مـی‌توان ساده‌تر کرد و یا حتی راه‌حل‌های ساده‌تری برای آن‌ها پیدا کرد.

در مورد مساله‌های ساختمانی بغرنج‌تر، اغلب پیش می‌آید که، بـا تجزیه و تحلیل روشی که تا کنون ساده‌ترین و زیباترین راه‌حل به‌نظرمی‌آمد از نظر زیبایی و سادگی در مرحله‌ای پایین‌تر از روش‌های دیگـر قرار می‌گیرد.

مثلاً راه حل ژرگون از مسالـهٔ آپولونیوس دربارهٔ مماس‌هـا (§۷)، ساده‌ترین و زیباترین راه حل شناخته شده است، درحالی‌که عدد S متناظر با این راه‌حل، بزرگتر از عددی است که برای راه حل‌های دیگـر به‌دست می‌آید.

۵. به‌جز پرگار و خط‌کش، ابزارهای دیگری هم برای رسم بـه‌کار می‌روند، مثل خط‌کش دولبه، یا زاویهٔ قائمهٔ متحرك.

مثلاً، وقتی که بخواهیم دوخط راست دلخواه موازی باهم رسم کنیم کافی است دوخط راست در امتداد دو سمت خط‌کش دو لبه رسم کنیم تـا

خط‌های راست موازی موردنظرمان را به‌دست آوریم.

یا اگر بخواهیم از نقطهٔ P واقع برخط راست g، عمودی بر آن رسم کنیم، لزومی نداردکه از پرگار وخط‌کش استفاده‌کنیم، بلکه کافی است از زاویهٔ قائمه (و مثلاً گونیا) استفاده کنیم و خط راست لازم را مستقیماً رسم کنیم.

خط‌کش با دولبهٔ موازی و زاویهٔ قائمهٔ متحرك هم (که مثلاً از چوب ساخته شده باشد)، می‌توانند ابزارهای دقیقی برای رسیدن به‌نتیجه‌های دقیق به‌حساب آیند، با وجود این، باید این مطلب را در مورد هروسیله‌ای که برای رسم به‌کار می‌بریم، روشن کنیم.

چه خط‌کش بادولبهٔ موازی وچه زاویهٔ قائمه، به‌طور جداگانه، برای حل هر مسالهٔ درجهٔ دوم کافی است و ما این موضوع را در فصل چهارم روشن کردیم. ساختمان‌های به‌کمك خط‌کش دو لبه، در بسیاری موردها و مثلاً برای نقشه‌برداری، اهمیت زیادی دارند. و همان‌طورکه در §۴۸ دیدیم، زاویهٔ قائمه،برای رسم، به‌مراتب نیرومندتر ازوسیله‌های دیگراست، زیرا به‌کمك چند زاویهٔ قائمه می‌توان مساله‌های درجهٔ سوم را هم، با دقت کامل حل کرد.

بنابراین، نبایدخودرا به‌عمل‌های مقدماتی مربوط به‌پرگار وخط‌کش يك لبه محدود کنیم، بلکه باید این عمل‌ها را دربارهٔ خط‌کش دو لبه و زاویهٔ قائمه هم در نظر بگیریم، زیرا این ابزارها هم درعمل مورد استفاده قرار می‌گیرند.

به‌همین مناسبت، عمل‌های مقدماتی زیر راهم، به‌آنچه لوموان آورده بود، اضافه می‌کنیم.

A) به‌کمك خط‌کش با دو لبهٔ موازی، می‌توان این دو عمل مقدماتی را هم انجام داد:

a) خط‌کش دولبه را می‌توان درصفحهٔ شکل طوری قراردادکه یکی از لبه‌های آن برخط راست مفروض، منطبق شود (مسالهٔ ۱۶۶ و شکل ۹۸ را ببینید).

این عمل را هم‌ارز با قرار دادن خط‌کش درکنار دو نقطهٔ مفروض

می گیریم و بنابراین آن را با نماد

$$(۲R_۱)$$: عمل

نشان می‌دهیم.

b) در بعضی ساختمان‌ها پیش می‌آید (مسالهٔ ۱۶۵ را ببینید) که باید خط‌کش دو لبه را روی صفحهٔ شکل طوری قرار داد که یك لبهٔ آن از نقطهٔ مفروض و لبهٔ دیگر آن از نقطهٔ مفروض دیگری بگذرد.

این‌عمل راهم، هم‌ارز با قراردادن خط‌کش در کنار دونقطه‌می گیریم و بنابراین، برای آن داریم:

$$(۲R_۱)$$: عمل

B) به‌کمك زاویهٔ قائمه، می‌توان سه‌عمل تازهٔ مقدماتی را انجام داد.

a) می‌توان زاویهٔ قائمه را در صفحهٔ شکل طوری قرار داد که یك ضلع آن بر خط راست مفروضی منطبق باشد:

$$(۲R_۱)$$: عمل

b) در حل بعضی مساله‌ها، باید زاویهٔ قائمه را روی صفحهٔ شکل طوری قرار داد که یك ضلع آن از نقطهٔ مفروض و ضلع دیگر آن از نقطهٔ مفروض دیگری بگذرد:

$$(۲R_۱)$$: عمل

c) پیش می‌آید (مثل مسالهٔ ۱۷۶) که باید زاویهٔ قائمه را طوری قرار داد که رأس آن برخط مفروضی قرارگیرد. این عمل را بانماد تازه‌ای نشان می‌دهیم:

$$(W_۱)$$: عمل

اگر زاویهٔ قائمه را در صفحهٔ شکل طوری قرار دهیم که رأس آن برنقطهٔ مفروض P ازخط راست مفروض g قرارگیرد و یکی از ضلع‌های آن برخط راست g منطبق شود، آن وقت این عمل، بنابرآن‌چه گفته شد، این‌طور نشان داده می‌شود:

$$(R_۱+W_۱)$$: عمل

C) بالاخره، فرض می کنیم بخواهیم زاویهٔ قائمه راطوری قراردهیم

که رأس آن بر یك خط راست یا یك خط منحنی واقع باشد و، علاوه بر آن بخواهیم موضع رأس را با یك نقطه مشخص کنیم.

این عمل را با این نماد نشان دهیم: (P_1): عمل

برای این فرض، مثالی می‌آوریم.

فرض کنید برای حل یك مسالهٔ ساختمانی هندسه (مثلاً، مسالهٔ ۱۷۶)، زاویهٔ قائمه را در صفحه طوری قرار داده باشیم که یکی از ضلع‌های آن از نقطهٔ مفروض A و ضلع دیگر از نقطهٔ مفروض B بگذرد و رأس آن بر خط راست g واقع باشد و فرض کنید، موضع رأس را نشان گذاشته باشیم. در این‌صورت، نماد ساختمان، چنین است:

$$(2R_1+W_1+P_1) \text{ :عمل}$$

همهٔ این‌عمل‌های مقدماتی را به‌عمل‌های مقدماتی لوموان اضافه‌می‌کنیم وارزش هرعمل مقدماتی را با ارزش عمل مقدماتی دیگر، یکسان می‌گیریم. در این‌صورت، S، یعنی تعداد آن‌ها، معیاری برای سادگی روش راه حل خواهد بود.

یادداشت. برابری ارزش این عمل‌ها را نمی‌توان ثابت کرد: این، یك قرارداد یا یك فرض است، نه‌اثبات.

ضمن برشمردن عمل‌های مقدماتی، تلاش کردیم، تا آن‌جا که ممکن است از حداقل نمادها استفاده کنیم.

دراین‌جا، همچنین فرض براین است که ابزارهای مورداستفاده برای رسم، اندازه‌های مناسب و معقولی دارند، یعنی نه‌خیلی بزرگ‌اند ونه خیلی کوچك. لوموان هم برای ابزارهای رسم، همین فرض را قبول‌کرده است.

۵۶§. مساله‌ها و تمرین‌ها

۱. در مساله‌ها و تمرین‌های این فصل، علاوه بر پرگار وخط‌کش معمولی، بایدخط‌کش دولبه و زاویهٔ‌قائمه را هم، همچون‌ابزارهایی‌هم‌ارزش باآن‌ها به‌حساب آورد.

همهٔ مساله‌های سادهٔ ساختمانی را، با استفاده از همهٔ ابزارهای رسم انجام دهید؛ برای هرساختمان، نماد آن را تعیین‌کنید و روشی راجست‌وجو کنید که درجهٔ سادگی آن، تا حد امکان، کوچکتر باشد.

دنبال کردن چنین راهی برای حل مساله‌های ساختمانی هندسه، ارزش عملی زیادی دارد.

۲. در این‌جا، تنها به‌بررسی چند مساله، با استفاده از همهٔ ابزارهای رسم، می‌پردازیم، نماد رسم را تعیین و درجهٔ سادگی آن، S را، مشخص می‌کنیم.

عدد $S_۱$ که برای بعضی از این مساله‌ها معین کرده‌ایم، معرف کمترین درجهٔ سادگی است که تاکنون پیدا شده است، به‌شرطی که، مثل لوموان، تنها پرگار و خط‌کش را، به‌عنوان ابزارهای رسم، به‌حساب آوریم.

۳. ساختمان‌های کمکی

۲۰۹. دو خط راست دلخواه عمود برهم رسم کنید.

راه‌حل به‌کمك زاویهٔ قائمه به‌دست می‌آید:

$$\text{عمل}:(۲R_۱);\ S=۲;\ S_۱=۸$$

۲۱۰. خط راست g و نقطهٔ P واقع برآن مفروض است. می‌خواهیم خط راست x را عمود بر g در نقطهٔ P رسم کنیم.

رسم به‌کمك زاویه قائمه انجام می‌گیرد:

$$\text{عمل}:(R_۱+R_۲+W_۱)\ ;\ S=۳\ ;\ S_۱=۸$$

۲۱۱. پاره‌خط AB مفروض است. می‌خواهیم عمود منصف آن را رسم کنیم.

ساختمان کلاسیك. دایره‌های $A(r)$* و $B(r)$ را رسم و نقطه‌های برخورد آن‌ها، C و D را به‌هم وصل می‌کنیم:

$$\text{عمل}:(۲R_۱+R_۲+۲C_۱+۲C_۲)\ ;\ S=۷$$

در ضمن، این راه‌حل کلاسیك، ساده‌ترین راه‌حل هم می‌باشد.

---

*) نماد $A(r)$، یعنی دایره‌ای به‌مرکز A و شعاع r.

(در §۲۳ نشان دادیم که چگونه می‌توان پاره‌خط را به‌کمك خط‌کش دولبه نصف‌کرد و در §۲۴ راه نصف‌کردن پاره‌خط را به‌کمك زاویهٔ قائمه مشخص‌کردیم. نماد این دوساختمان را پیدا ودرجهٔ سادگی آن‌ها رامشخص کنید.)

۲۱۲. خط راست g ونقطهٔ P دربیرون‌آن داده شده‌است. می‌خواهیم خط راست x را از P بر g رسم کنیم.

حل به‌کمك زاویهٔ قائمه انجام می‌گیرد: یك ضلع‌آن را برخط‌راست g قرار می‌دهیم و آن را تا آن‌جا حرکت می‌دهیم که ضلع دوم آن از P بگذرد و، سپس عمود مجهول را می‌کشیم:

$$(۳R_۱+R_۲)\text{: عمل}\ ;\ S=۴;\ S_۱=۹$$

۲۱۳. می‌خواهیم دو خط راست دلخواه موازی رسم کنیم.

این ساختمان به‌کمك خط‌کش دو لبه انجام می‌گیرد:

$$(۲R_۱)\text{: عمل};\ S=۲;\ S_۱=۸$$

۲۱۴. پاره‌خط d و خط راست g مفروض‌اند. می‌خواهیم خط راست x را موازی g و به‌فاصلهٔ d از آن رسم کنیم.

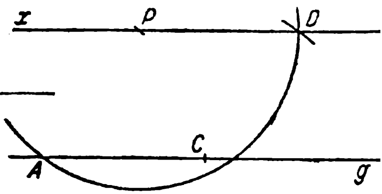
به‌کمك‌زاویهٔ قائمه، عمود دلخواهی بر g رسم می‌کنیم $(۲R_۱+R_۲)$ روی آن، از نقطهٔ برخورد با g، پاره خط d را به‌کمك پرگار جدامی‌کنیم $(۳C_۱+C_۲)$ و از نقطه‌ای که به‌این ترتیب به‌دست می‌آید، خط راست مجهول x رابه‌کمك زاویهٔ قائمه رسم می‌کنیم $(W_۱+R_۱+R_۲)$. درنتیجه

$$(۳R_۱+۲R_۲+۳C_۱+C_۲+W_۱)\text{: عمل};\ S=۱۰;\ S_۱=۱۵$$

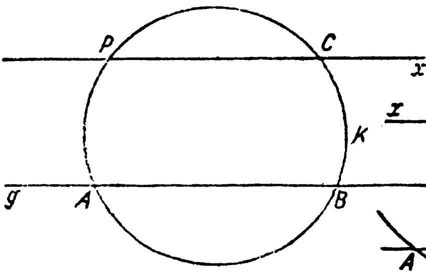
۲۱۵. خط راست g و نقطهٔ P مفروض‌اند. خط راستی رسم کنید که از P بگذرد و با g موازی باشد.

ابتدا دو راه حل را می‌دهیم که، تا کنون، خوش‌رسم شناخته شده‌اند.

a) دایرهٔ $P(r)$ را با شعاعی به‌اندازهٔ کافی بزرگ رسم می‌کنیم (شکل۱۶۲). اکنون اگر دایرهٔ $A(r)$ را رسم کنیم، نقطهٔ C به‌دست می‌آید. دایرهٔ $C(r)$، دایرهٔ $P(r)$ را در نقطهٔ D قطع می‌کند و PD خط راست x



شکل ۱۶۲



شکل ۱۶۳

مجهول است:

$$\text{عمل}: (۲R_۱+R_۲+۳C_۱+۳C_۲);\ S=۹$$

d) دایرهٔ دلخواه K را از P می‌گذرانیم (شکل ۱۶۳) که g را در نقطه‌های A و B قطع می‌کند. اکنون اگر به‌کمك پرگار جدا کنیم:

$$\overset{\frown}{PC}=\overset{\frown}{AP}$$

آن‌وقت، PC خط راست مجهول x است:

$$\text{عمل}: (۲R_۱+R_۲+۴C_۱+۲C_۲);\ S=۹$$

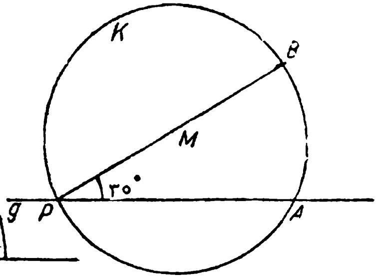
اکنون مسأله را به‌کمك زاویهٔ قائمه حل می‌کنیم.

زاویهٔ قائمه را در صفحهٔ شکل طوری قرار می‌دهیم که یکی از ضلع‌های آن بر g قرار گیرد و ضلع دیگر آن از P بگذرد ($۳R_۱$). از P عمود n را بر g رسم می‌کنیم ($R_۲$). سپس، ضلع‌زاویهٔ قائمه را طوری بر n قرار می‌دهیم که رأس آن بر P منطبق شود و، بالاخره، خط راست مجهول x را می‌کشیم:

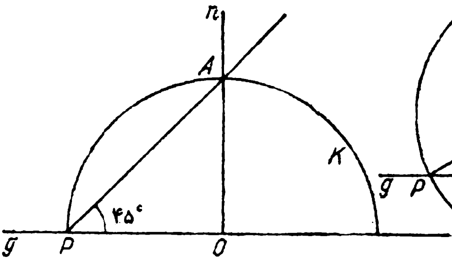
$$\text{حل}: (۴R_۱+۲R_۲+W_۱);\ S=۷$$

۲۱۶. خط راست g ونقطهٔ P واقع برآن مفروض‌اند. خط‌راستی از نقطهٔ P بگذرانیدکه با g زاویه‌ای برابر ۳۰ یا ۴۵ درجه بسازد.

a) دایرهٔ K را به‌شعاع دلخواه r از P می‌گذرانیم و دایرهٔ $A(r)$ را رسم می‌کنیم؛ نقطهٔ B به‌دست می‌آید وداریم (شکل ۱۶۴):



شکل ۱۶۴



شکل ۱۶۵

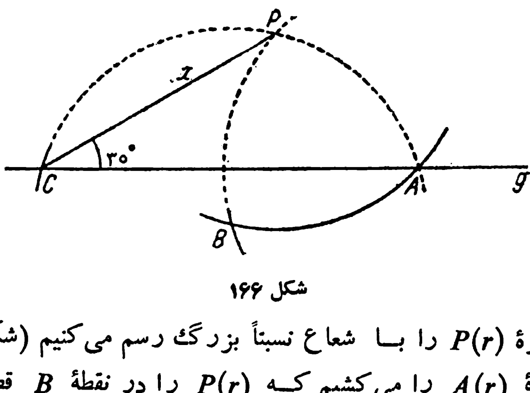
$$\widehat{BPA}=۳۰^\circ$$

عمل: $(۲R_۱+R_۲+۲C_۱+۲C_۲)$; $S=۷$

(b به‌کمك زاویهٔ قائمه، خط راست n را می‌کشیم (شکل ۱۶۵) که بر g عمود و در فاصلهٔ دلخواهی از P واقع باشد $(۲R_۱+R_۲)$؛ اگر دایرهٔ به‌مرکز O و شعاع OP را رسم‌کنیم، خط راست AP با g زاویهٔ ۴۵ درجه را تشکیل می‌دهد:

عمل: $(۴R_۱+۲R_۲+۲C_۱+C_۲)$; $S=۹$; $S_۱=۱۳$

۲۱۷. خط راست g و نقطهٔ P واقع در بیرون آن داده شده است. ازنقطهٔ P خط‌راستی بگذرانیدکه با g زاویه‌ای برابر ۳۰ درجه تشکیل‌دهد.



شکل ۱۶۶

دایرهٔ $P(r)$ را با شعاع نسبتاً بزرگ رسم می‌کنیم (شکل ۱۶۶). سپس دایرهٔ $A(r)$ را می‌کشیم که $P(r)$ را در نقطهٔ B قطع می‌کند. سرانجام دایرهٔ $B(r)$ را رسم می‌کنیم و نقطهٔ C را به‌دست می‌آوریم. PC خط‌راست مجهول x است:

عمل: $(2R_1+R_2+3C_1+3C_2);\ S=9$

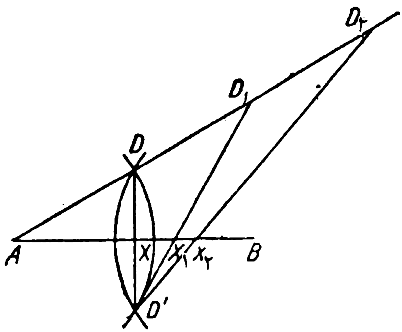
(پیشنهاد می کنیم، همین مسأله را برای حالتی‌که خط راست x با g زاویهٔ ۴۵ یا ۶۰ درجه می‌سازد حل کنید. از همهٔ ابزارهای رسم استفاده کنید).

۲۱۸. زاویهٔ α، خط راست g و نقطهٔ P واقع برآن مفروض‌اند. خط راست x را طوری از P بگذرانید‌که با g زاویه‌ای برابر α تشکیل‌دهد.

راه‌حل کلاسیك این‌مسأله، همان راه‌حل خوش‌رسمی آن‌است وداریم:

عمل: $(2R_1+R_2+5C_1+3C_2);\ S=11$

۲۱۹. پاره‌خط AB مفروض است. می‌خواهیم $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{4}$، $\frac{1}{5}$، ... این پاره‌خط را پیداکنیم.



شکل ۱۶۷

دایره‌های $A(r)$ و $B(r)$ را با شعاعی دلخواه ولی به‌اندازهٔ کافی بزرگ، رسم‌می‌کنیم ونقطه‌های D و D' را به‌دست می‌آوریم(شکل۱۶۷). سپس، خط راست AD را رسم و روی آن نقطه‌های D_1، D_2، D_3،... را طوری پیدا می‌کنیم‌که داشته باشیم.

$$\overline{AD}=\overline{DD_1}=\overline{D_1D_2}=\overline{D_2D_3}=\dots$$

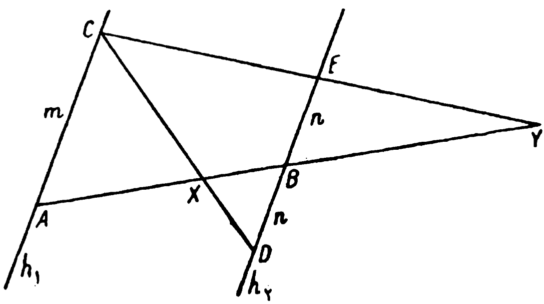
اکنون اگرنقطهٔ D' را به‌ترتیب‌به‌نقطه‌های D_1، D_2،... وصل‌کنیم،نقطه‌های X_1، X_2،... به‌دست می‌آید و در ضمن

$$\overline{XB}=\frac{1}{2}\overline{AB},\ \ \overline{X_1B}=\frac{1}{3}\overline{AB},\ \ \overline{X_2B}=\frac{1}{4}\overline{AB},\ldots$$

پیشنهـاد می‌کنیم این راه‌حل را بـا راه‌حل مسألهٔ ۱۱۰ (شکل ۵۷) مقایسه کنید و عدد S را برای هر کدام از آن‌ها به‌دست آورید.

۲۲۰. پاره‌خط AB ودوپاره‌خط دلخواه m و n مفروض‌اند. می‌خواهیم روی خط راست AB، نقطه‌های X و Y را طوری پیداکنیم‌که برای آن‌هـا داشته باشیم:

$$\overline{AY}:\overline{BY}=m:n \text{ یا } \overline{AX}:\overline{XB}=m:n$$



شکل ۱۶۸

به‌کمك خط‌کش دولبه، خطهای راست موازی h_1 و h_2 را از A و B می‌گذرانیم (شکل ۱۶۸) $(2R_1+2R_2)$. سپس، به‌کمك پرگار، پاره‌خطهای m و n را جدا می‌کنیم (از پـاره‌خط n، دوبار) و نقطه‌هـای C، D و E را به‌دست می‌آوریم $(6C_1+2C_2)$. بالاخره خطهای راست CD و CE را می‌کشیم ونقطه‌های X و Y را به‌دست می‌آوریم.

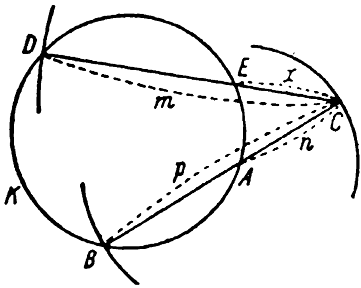
$$\text{عمل}: (6R_1+4R_2+6C_1+2C_2);\ \ S=18;\ \ S_1=20$$

۲۲۱. سه نقطهٔ A، X و B ازیك‌خط راست داده شده‌اند. می‌خواهیم، نقطهٔ Y، زوج توافقی X نسبت به A و B را پیداکنیم.

تـاکنون مرتبهٔ سادگی S_1 به ۱۳ رسیده است . بـا استفاده از همهٔ ابزارهای رسم، این مرتبه را پایین بیاورید.

۲۲۲. با مفروض بودن پاره‌خطهای m، n و p، می‌خواهیم جزء چهارم تناسب را بسازیم.

$p>n$ فرض می‌کنیم.



شکل ۱۶۹

A) قبل از همه به راه‌حل‌هایی می‌پردازیم که تاکنون، خوش رسم به‌حساب می‌آمدند، یعنی راه‌حل‌هایی که به‌کمك پرگار و خط‌کش به‌انجام می‌رسند.

راه‌حل اول. دایرهٔ دلخواه ولی به اندازهٔ کافی بزرگ K را رسم می‌کنیم (شکل ۱۶۹). بعد، روی K، نقطهٔ دلخواه A را انتخاب و دایره‌های $A(n)$ و $A(p-n)$ را می‌کشیم؛ در ضمن، $p-n$ به‌کمك پرگار و با مفروض بودن p و n به‌دست می‌آید. نقطهٔ B، محل برخورد دایرهٔ $A(p-n)$ با K را به A وصل می‌کنیم که، در نتیجه، روی محیط دایرهٔ $A(n)$، نقطهٔ C به‌دست می‌آید. سپس روی K، نقطهٔ D را طوری پیدا می‌کنیم که داشته باشیم:

$$\overline{CD}=m$$

و خط راست CD را رسم می‌کنیم که K را در نقطهٔ دوم E قطع می‌کند. در این‌صورت

$$\overline{EC}=x$$

زیرا به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$m : x = n : p$$

$$\text{عمل: } (4R_1 + 2R_2 + 10C_1 + 5C_2);\ S = 21$$

راه‌حل دوم. این راه‌حل، ناشی از قضیهٔ زیر است:

ABC را مثلثی محاط در دایرهٔ K فرض کنید (شکل ۱۷۰)؛ سپس، خط راست AD را موازی BC و AX را خط‌راست دلخواهی بگیرید که از نقطهٔ A بگذرد و K را در نقطهٔ دیگر Y قطع کند. در این‌صورت

$$\overline{AX} \cdot \overline{DY} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

(اثبات این قضیه، از تشابه دو مثلث DBY و ABX به‌دست می‌آید.)

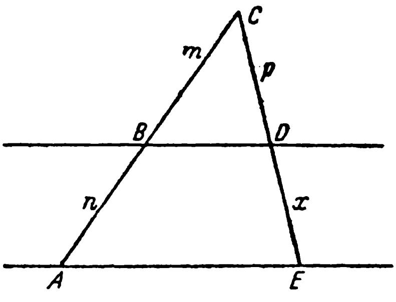
برای پیداکردن x، دایرهٔ K را رسم می‌کنیم (شکل ۱۷۰)، نقطهٔ A را روی آن در نظر می‌گیریم و این پاره‌خط‌ها را می‌سازیم:

$$\overline{AB} = n, \quad \overline{AC} = p, \quad \overline{CD} = \overline{AB}, \quad \overline{DY} = m$$

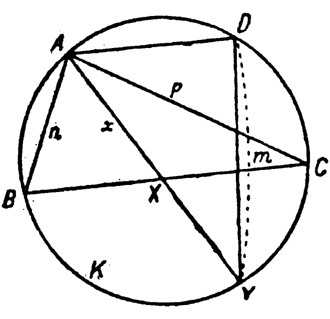
اکنون اگر AY را رسم کنیم، پـاره‌خط AX، جزء چهارم تناسب موردنظر است.

$$\text{عمل: } (4R_1 + 2R_2 + 10C_1 + 5C_2);\ S = 21$$

یادآوری می‌کنیم که در هردو راه‌حل، هم نمادها و هم ضریب سادگی S، یکسان‌اند.



شکل ۱۷۱



شکل ۱۷۰

B) اگر خط‌کش با دولبهٔ موازی را هم، به‌عنوان ابزار رسم، در نظر بگیریم، می‌توان ضریب سادگی S را کوچکتر کرد.

دوخط راست موازی دلخواه، بــه کمك خط‌کش دولبه، رسم می کنیم ($۲R_۲$). نقطهٔ A را روی یکی ازاین خطهــای موازی در نظر می گیریم و نقطهٔ B را به‌کمك پرگار طوری پیدا می کنیم که پاره‌خط AB برابر n باشد (شکل ۱۷۱)؛ سپس، خط‌راست AB را می کشیم ودوباره، بــه کمك پرگار، BC را برابر m و CD را برابر p رسم می کنیم.

اکنون اگر C و D را به‌هم وصل کنیم و خط راست حاصل را ادامه دهیم تــا خط راستی را کــه از A موازی BD رسم شــده است، قطع کند، پاره‌خط DE، پاره‌خط مجهول x، به‌دست می آید:

$$\text{عمل}: (۴R_۱ + ۴R_۲ + ۹C_۱ + ۳C_۲) \;\; ; \;\; S = ۲۰$$

می بینیم به‌کمك این ابزار رسم، يك‌واحد ازعدد S کم شد.

(سعی کنیدبااستفاده ازابزارهای گسترده‌تری، بازهم‌عدد S را کوچکتر کنید.)

c) برای رسم جزء چهارم يك تناسب (x)، وقتی که سه‌جزء m، n و p از آن معلوم است، روش بسیار ساده‌ای وجود دارد. ولی این روش تنها يك نقص دارد: باید پاره‌خط $۲m$، از هريك از دوجزء وسط تناسب

$$m : n = p : x$$

بزرگتر باشد. این روش را شرح می‌دهیم.

۱. ابتدا ساختمان ماسکه‌رونی برای تعیین جزء چهارم تناسب را، که در§۱۸ آورده بودیم، به‌یاد می‌آوریم. این‌ساختمان، دارای نماد زیر است:

$$\text{عمل}: (۹C_۱ + ۵C_۲) \;\; ; \;\; S = ۱۴$$

۲. روش دیگر را، که تنها از پرگاراستفاده می‌شود، لوموان ازگزارهٔ زیر به‌دست‌آورده است.

در هرمثلث، حاصل‌ضرب دوضلع برابراست با حاصل‌ضرب دو برابر ارتفاع وارد برضلع سوم درشعاع دایرهٔ محیطی مثلث.

(این گزاره، حالت خاصی است از قضیه‌ای که درابتدای راه‌حل دوم، درچند صفحهٔ قبل، آوردیم.)

با تکیه بر این گزاره، برای پیدا کردن جزء چهارم تناسب، می‌توان به‌این ترتیب عمل کرد.

دایرهٔ K را به شعاع m رسم می‌کنیم و نقطهٔ دلخواه A را روی محیط آن در نظر می‌گیریم (شکل ۱۷۲). سپس، دایرهٔ $A(n)$ را رسم می‌کنیم که دایرهٔ K را در B قطع می‌کند؛ دایرهٔ $B(p)$ هم دایرهٔ K را در C قطع می‌کند. اگر بالاخره، دایرهٔ $C(p)$ را بکشیم، دایرهٔ $A(n)$ را در نقطهٔ D قطع می‌کند و داریم:

$$\overline{AD} = x$$

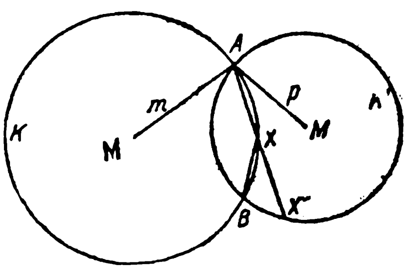
زیرا BD برابراست با دوبرابر ارتفاع مثلث ABC.

$$\text{عمل}: (۹C_۱ + ۴C_۲)\ ;\ S = ۱۳$$

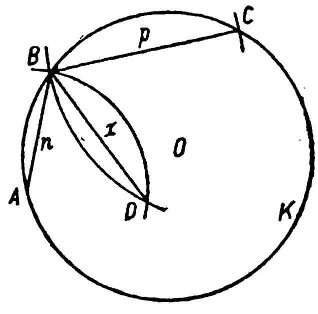
لزومی به‌رسم خط‌های راست n، p و x نیست؛ روشن است‌که‌تمامی شکل را می‌توان تنها به کمک پرگار رسم کرد، ولی باید شرط $۲m > p$ برقرار باشد.

۳. هونتشه، راه‌حل نموداری جالبی برای این مساله دارد، که ناشی از قضیهٔ زیر است.

K و K' را دودایره، به‌ترتیب به شعاع‌های m و p می‌گیریم (شکل



شکل ۱۷۳



شکل ۱۷۲

۱۷۳). اگر ازیکی از نقطه‌های مشترك این‌دایره‌ها (A)، خط راست دلخواهی رسم کنیم که K را درنقطهٔ X و K' را درنقطهٔ X' قطع کند، همیشه داریم:

$$\overline{BX}:\overline{BX'}=m:p$$

درضمن B، نقطهٔ مشترك دوم دو دایـرهٔ K و K' است. (BAX)، زاویـه‌ای محاطی در هر دودایره است و، بنابراین، دومثلث BMX و $BM'X'$ با هم متشابه‌اند.)

ساختمانی که ازاین خاصیت نتیجه می‌شود، دارای نماد زیر است:

$$\text{عمل}:(۲R_۱+R_۲+۷C_۱+۳C_۲)\;;\;S=۱۳$$

خودتان ساختمان را پیدا کنید.

۲۲۳. دوپاره‌خط m و n مفروض‌اند. می‌خواهیم پاره‌خط x را طوری پیداکنیم‌که nواسطهٔ‌هندسی بین mوx باشد،یعنی داشته باشیم: $m:n=n:x$

این مساله را باتوجه به روش‌های حل مسالهٔ قبل حل کنید و ساختمان خوش‌رسمی آن را به‌دست‌آورید.

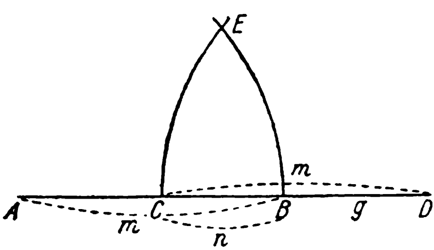
۲۲۴. دو پاره‌خط m و n مفروض‌اند. واسطهٔ هندسی این دو پاره‌خط را پیدا کنید.

باید حل نموداری تناسب زیر را به‌دست‌آورد:

$$m:x=x:n$$

همیشه می‌توان $m>n$ گرفت.

ابتدا راه حل‌هایی را می‌دهیم که، تاکنون، خوش‌رسم شناخته شده‌اند؛ راه حل دوم، تنها راه حل تغییر شکل یافتهٔ ساده‌ای ازراه حل اول است.



شکل ۱۷۴

راه حل اول. خط راست g را در نظر می‌گیریم. نقطهٔ دلخواه A را روی a انتخاب و دایرهٔ $A(m)$ را رسم می‌کنیم تا g را در نقطهٔ B قطع کند (شکل ۱۷۴). سپس، نقطهٔ C را به کمك پرگار طوری پیدا می‌کنیم که پاره‌خط BC برابر n باشد؛ همچنین نقطهٔ D را با شرط $CD=m$ جدا می‌کنیم. بالاخره، اگر دایرهٔ به مرکز D وشعاع DC را رسم کنیم، پاره‌خط CE (یا BE) همان پاره‌خط مجهول x است.

یادآوری مهم زیر ضروری است.

برای پیدا کردن نقطهٔ C، سوزن پرگار را در B قرار می‌دهیم؛ بعد باید نقطهٔ D را پیدا کنیم که، برای آن، باید سوزن پرگار را در نقطهٔ B و نوك مداد پرگار را در A قرار دهیم؛ به‌این طریق، یك عمل مقدماتی صرفه‌جویی می‌شود.

$$\text{عمل}: (R_2+9C_1+4C_2)\ ;\ S=14$$

اثبات. فاصلهٔ a، نقطهٔ E از خط راست g برابراست با

$$a=\sqrt{mn-\frac{n^2}{4}}$$

بنابراین

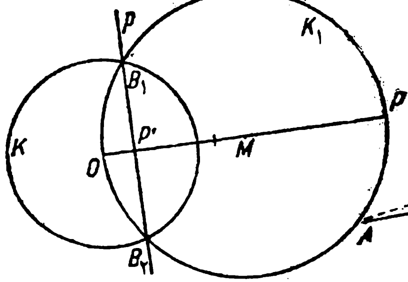
$$\overline{CE}=\sqrt{a^2+\frac{n^2}{4}}=\sqrt{mn}$$

راه حل دوم. دوباره خط راست g ونقطهٔ دلخواه A را روی آن درنظر می‌گیریم (شکل ۱۷۵) و دایرهٔ $A(m)$ را رسم می‌کنیم تا g را در نقطهٔ B قطع کند؛ بعد، دایره‌های $B(n)$ و $C(n)$ را رسم ونقطه‌های به‌دست آمدهٔ D و E را به‌هم وصل می‌کنیم. پاره‌خط BF همان x است.

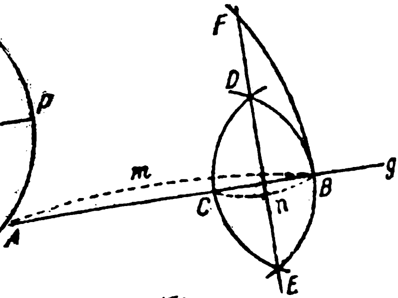
$$\text{عمل}: (2R_1+2R_2+7C_1+3C_2)\ ;\ S=14$$

۲۲۵. منعکس یك نقطه را نسبت به‌دایرهٔ مفروض پیدا کنید.

دایرهٔ K و نقطهٔ P واقع در بیرون دایره را مفروض می‌گیریم (شکل ۱۷۶). اگرقطبی p ازنقطهٔ P را نسبت به K پیدا کنیم، آن‌وقت، نقطهٔ P'،



شکل ۱۷۶



شکل ۱۷۵

محل برخورد p با خط راست OP (O، مرکز دایرهٔ K است)، منعکس نقطهٔ P نسبت به دایرهٔ K خواهد بود (§ ۲۰).

a) ساختمان کلاسیك. OP را می‌کشیم، آن را در نقطهٔ M نصف می‌کنیم، دایرهٔ $M(O)$ را رسم ونقطه‌های B_1 و B_2 را که به‌این ترتیب به‌دست می‌آیند، به‌هم وصل می‌کنیم (شکل ۱۷۶).

$$\text{عمل}: (6R_1 + 3R_2 + 4C_1 + 3C_2) \;;\; S = 16$$

b) می‌توان ساختمان را، تنها به‌کمك پرگار انجام داد (§ ۲۰، ۱). دراین صورت، خواهیم داشت:

$$\text{عمل}: (6C_1 + 3C_2) \;;\; S = 9$$

c) ساختمان به‌کمك زاویهٔ قائمه. زاویهٔ قائمه را روی صفحهٔ شکل طوری قرار می‌دهیم که ضلع‌های آن از O و P بگذرد و راس آن بر K قرارگیرد، سپس، جای راس را علامت می‌گذاریم؛ این عمل را دوبارانجام می‌دهیم. اگر نقطه‌هایی را که علامت گذاشته‌ایم، به هم‌وصل کنیم، قطبی p به‌دست می‌آید. بنابراین، نقطهٔ برخورد آن باخط راستی که‌ازمرکزمی گذرد، نقطهٔ مجهول P' را به‌ما می‌دهد.

$$\text{عمل}: (8R_1 + 2R_2 + 2W_1 + 2P_2) \;;\; S = 14$$

همچنین، به‌کمك یك خط‌کش بـا دولبهٔ موازی هم می‌توان نقطهٔ P' منعکس نقطهٔ P را به‌دست آورد. خودتان این ساختمان را پیدا کنید.

به‌این ترتیب، معلوم می‌شود که حل مساله به کمك تنها یك پرگار، از همهٔ موردهای دیگر مناسب‌تر است.

۲۲۶. قطبی نقطهٔ P نسبت به‌دایرهٔ K را پیدا کنید.

a) ساختمان کلاسیك.

$$\text{عمل}: (۶R_۱ + ۳R_۲ + ۴C_۱ + ۳C_۲) : S = ۱۶$$

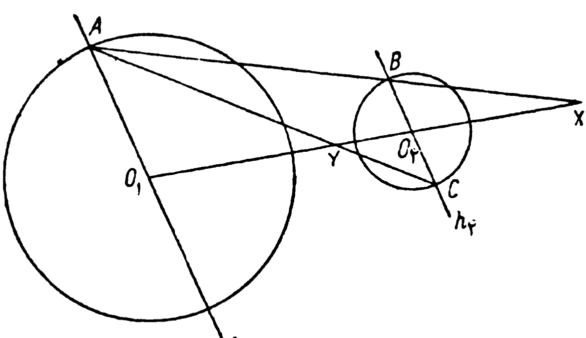
b) به کمك زاویهٔ قائمه. باید کاملاً شبیه مسالهٔ قبل عمل کرد، فقط لزومی به رسم خط مرکزی نیست.

$$\text{عمل}: (۶R_۱ + R_۲ + ۲W_۱ + ۲P_۱)\ ;\ S = ۱۱$$

۲۲۷. مرکز تشابه دو دایره را پیدا کنید.

ساختمان لوموان، حداقل مقدار S را برای این مساله، عدد ۱۷ می‌دهد. ولی اگر از خط کش با دولبهٔ موازی استفاده کنیم، به‌عدد کوچکتری می‌رسیم.

دو دایرهٔ $K_۱$ و $K_۲$ را به مرکزهای $O_۱$ و $O_۲$ در نظر می گیریم. خط المرکزین دو دایره را می کشیم، سپس خط کش را روی صفحهٔ شکل طوری قرار می‌دهیم که یك لبهٔ آن از $O_۱$ ولبهٔ دیگرش از $O_۲$ بگذرد و در امتداد دولبهٔ خط کش، دو خط موازی رسم می کنیم. این خطهای موازی دو دایره را درنقطه‌هایی قطع می کنند که اگر دونقطهٔ متناظر را به‌هم وصل کنیم،



شکل ۱۷۷

مرکز تشابه به‌دست می‌آید (شکل ۱۷۷).

$$S=۱۳ \quad , \quad (۸R_۱+۵R_۲):\text{عمل}$$

۲۲۸. مسالهٔ اصلی

با توجه به‌این مساله‌ها روشن می‌شود کـه اگر، برای رسم، از زاویهٔ قائمه وخط‌کش دولبـه استفاده‌کنیم، می‌تـوانیم روش‌های تازه‌ای برای حل پیداکنیم‌که، اغلب، ازروش‌های حل با پرگار وخط‌کش ساده‌ترند.

ازآن جا کـه، زاویهٔ قائمه وخط‌کش دولبه، عملاً همراه با پرگار و خط‌کش ساده، برای رسم به‌کار می‌روند و، درضمن، این فصل وقتی اهمیت پیدا می‌کندکه در ارتباط با واقعیت عمل باشد، بنابراین با مساله‌ای مواجه می‌شویم: «برای حل همهٔ مساله‌های ساده یا مساله‌های مهم ساختمانی، دوباره وبه‌کمك همهٔ ابزارهای رسم اقدام‌کنید و درمورد هرراه‌حل، ضریب سادگی را به‌دست آورید و، درنتیجه، راه حل خوش رسمی آن‌ها را پیدا کنید».

یادداشت‌ها

۱. می‌توان از اصطلاح‌های مجسم، تجسمی، ترسیمی، نموداری و غیر آن استفاده کرد؛ در این‌جا بهتر دیدیم از همان اصطلاح موردنظر مؤلف استفاده کنیم.

۲. چاپ تازهٔ کتاب انریکس به‌زبان ایتالیائی، با این عنوان منتشر شده است:

Questioni Rigardanti La Mathematica Elementare

۳. از نقطه‌نظر صوری، رسم شکل، تنها یك نقش کمکی دارد (مقدمه را ببینید).

۴. تقسیم مسأله‌های ترکیبی هندسه به «معین»، «نامعین» و «ناممکن»، چندان دقیق نیست. مثلاً، مثلثی را که ضلع‌های آن از سه نقطهٔ مفروض بگذرند وطول‌های مفروضی داشته باشند، باید معین دانست، در ضمن، مثلثی هم که تنها طول سه‌ضلع آن مفروض باشند، معین است (به‌این اعتبار که همهٔ مثلث‌های حاصل، برابر و هم‌نهشت‌اند). از آن‌جا که این گونه تقسیم‌بندی مسأله‌های هندسی، برای نظریهٔ ساختمان‌های هندسی، اهمیت چندانی ندارد، از بحث تفصیلی دربارهٔ آن می‌گذریم.

۵. برای شرط‌هایی که متناظر با به‌کاربردن پرگار وخط‌کش است، به‌مقدمه مراجعه کنید.

۶. قرینهٔ یك نقطه نسبت به‌خط راست s را، تصویر آئینه‌ای هم می‌گویند (دراین حالت، به‌جای خط راست s، باید صفحه‌ای آئینه‌ای را در نظر

گرفت که از s می‌گذرد و برصفحهٔ شکل عمود است). در هرحال، برای پیداکردن قرینهٔ نقطهٔ R نسبت به‌خط راست s (یا تصویرآئینه‌ای R در s)، به‌این ترتیب به‌دست می‌آید که از R عمودی بر s فرودآوریم و درطرف دیگر s به‌اندازهٔ خودش امتداد دهیم تا به‌نقطهٔ Q برسیم.

۷. به‌سادگی دیده می‌شود که نقطه‌های K، L و M روی‌نیمسازهای زاویه‌های متناظر خود قرار دارند و، در ضمن، نیمسازها در نقطهٔ O به‌هم می‌رسند.

۸. درضمن $\overline{RB}=\overline{BF}=y$ و $\overline{PB}=\overline{BE}=t$.

۹. اگر خطهای راست مفروض، موازی‌باشند، آن‌وقت مکان هندسی، عبارت است از خط راستی موازی با دو خط راست مفروض و به‌یک‌فاصله از آن‌ها.

۱۰. علاوه بر کمانی که روی شکل ۴ نشان داده شده است، قرینهٔ آن نسبت به‌پاره‌خط AB هم، به‌مکان هندسی مطلوب، تعلق دارد.

۱۱. نقطه‌های P_1 و P_2، پاره‌خط AB را به‌ترتیب درداخل وخارج آن، به‌نسبت $m:n$ تقسیم می‌کنند. اگر نقطهٔ P با شرط مفروض سازگار باشد، یعنی اگر داشته باشیم:

$$\overline{AP}:\overline{BP}=m:n=\overline{AP_1}:\overline{BP_1}=\overline{AP_2}:\overline{BP_2}$$

آن‌وقت واضح است که خطهای راست PP_1 و PP_2 به‌ترتیب نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ P ازمثلث APB می‌شوند. بنابراین $PP_1 \perp PP_2$ و نقطهٔ P برمحیط دایرهٔ به قطر P_1P_2 قرار می‌گیرد. برای اثبات حکم عکس، نقطهٔ‌دلخواه P را برمحیط دایره انتخاب و ED را عمود بر PP_1 رسم می‌کنیم (در ضمن $ED \| PP_2$). از تشابه مثلث‌ها به‌دست می‌آید:

$$\frac{h}{k}=\frac{\overline{BP_1}}{\overline{BP_2}} \text{ و } \frac{h_1}{k}=\frac{\overline{AP_1}}{\overline{AP_2}} \Longrightarrow \frac{h}{h_1}=\frac{\overline{BP_1}}{\overline{BP_2}}:\frac{\overline{AP_1}}{\overline{AP_2}}=1$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود: $h=h_1$. از برابری دو مثلث PEP_1 و PDP_1 معلوم می‌شود که PP_1 نیمساز زاویهٔ APB است، به‌نحوی که داریم:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\frac{\overline{AP_1}}{\overline{BP_1}}=\frac{m}{n}$$

۱۲. شعاع‌های دودایرهٔ K'_1 و K'_2 ازشعاع‌های دایره‌های K_1وK_2، با اضافه یاکم کردن شعاع دایرهٔ K_3 از آن‌ها، به‌دست می‌آیند (روی شکل، در هردوحالت، شعاع‌ها بزرگ شده‌اند).

۱۳. بنابراین، مرکزهای مجهول، در نقطه‌های برخورددو تا از این مقطع‌های مخروطی واقع‌اند؛ عکس این حکم درست نیست. مسأله، روی‌هم دارای ۸ جواب است.

۱۴. نقطهٔ مجهول را O می‌گیریم. در این صورت، OB نیمساز زاویهٔ AOC و OC نیمساز زاویهٔ BOD است. در نتیجه

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}\,,\ \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}$$

۱۵. می‌گویند دو دایره، تحت زاویهٔ α یکدیگر را قطع کرده‌اند، وقتی که زاویهٔ بین مماس‌های بردو دایره در نقطهٔ برخورد آن‌ها، برابر α باشد.

به‌همین ترتیب، زاویهٔ بین خط راست و دایره عبارت، است اززاویهٔ بین خط راست و مماس بردایره در نقطهٔ برخوردآن‌ها.

اگر دو دایره برهم عمود باشند (یعنی، یکدیگر را تحت زاویهٔ قائمه قطع کنند)، خط راست مماسی که در نقطهٔ برخورد آن‌ها بریکی از دو دایره رسم شود، از مرکز دایرهٔ دیگر می‌گذرد. مسأله، منجر به‌پیداکردن نقطه‌ای می‌شود که بتوان از آن‌جا، سه‌مماس برابر با هم برسه دایره رسم کرد.

۱۶. وقتی که می‌گوییم دایرهٔ K ازنقطهٔ A به‌زاویهٔ α دیده می‌شود، به‌معنای آن است که اگر از نقطهٔ A دومماس بردایرهٔ K رسم کنیم، زاویهٔ بین دو مماس برابر α باشد.

۱۷. مکان هندسی، شامل سه‌خط راست است که از نقطهٔ برخورد

خط‌هـای راست مفروض می‌گذرند و دارای این خاصیت‌اند. که هریك از آن‌ها، همراه با دوخط راست مفروض وخط راستی که محل برخورد آن‌هارا به‌نقطهٔ P وصل می‌کند، تشکیل یك‌دسته‌نیم‌خط توافقی‌را می‌دهند: بنابراین، مسألهٔ مفروض، سه‌جواب دارد.

۱۸. راه‌حل ساده‌تر دیگری از این مسأله، براساس قضیهٔ زیر است: اگر نقطه‌های A و B بردوضلع روبه‌رو از مربعی، و نقطه‌های C و D بردو ضلع روبه‌روی دیگر همان مربع واقع باشند و داشته بـاشیم $AB \perp CD$، خواهیم داشت: $\overline{AB}=\overline{CD}$.

۱۹. رأس‌های چهارضلعی را A، B، C، D می‌گیریم وفرض می‌کنیم ضلع CD را بزرگ‌کنیم. از نقطه‌های A و B، دوخط راست عبور می‌کند که هرکدام ازآن‌ها در یکی ازجهت‌های مفروض قرار دارد. اگر نقطه‌های M و N، محل برخورد اولی بـا خط راست BD و دومی با خط راست AC را، به‌هم وصل‌کنیم، خط راستی به‌دست می‌آیدکـه همان مکان هندسی مطلوب است.

۲۰. با § ۱، ۳، مثال I مقایسه‌کنید.

۲۱. اگر M وسط ضلع a، و Q نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی بـا این ضلع بـاشد، داریم: $2\overline{MQ}=b-c$ $(b>c)$. N را پـای ارتفـاع h_a می‌گیریم و فرض می‌کنیم $MN=q$. داریم:

$$b^2-c^2=\left(\frac{a}{2}+q\right)^2-\left(\frac{a}{2}-q\right)^2=2aq$$

به‌جز آن داریم: $(a+b+c)r=ah$، بنابراین

$$\overline{MQ}=qr:(h_a-r)$$

۲۲. C را وسط کمان مفروض و D را نقطهٔ دیگری از این کمـان می‌گیریم. دایره‌ای به‌مرکز C و شعاع CA رسم می‌کنیم. طول خط‌شکستهٔ ACB برابر قطر وطول خط‌شکستهٔ ADB برابر وتری ازاین دایره می‌شود.

۲۳. از مرکزهای O و O_1 عمودهای Oo و O_1o_1 را برخط راست

MN، که از نقطهٔ برخورد این دایره‌ها می‌گذرد، رسم می‌کنیم. در حالت کلی داریم $\overline{oo_1} < \overline{OO_1}$ و تنها در حالتی که MN موازی OO_1 باشد، خواهیم داشت: $oo_1 = OO_1$.

۲۴. خط راستی که وسط پاره‌خط PQ را به‌نقطهٔ O وصل می‌کند، خطهای راست مفروض را در نقطه‌های مجهول X و Y قطع می‌کند.

۲۵. پاره‌خط PR از نقطه‌های X و Y، به زاویهٔ $180^\circ - \alpha$ دیده می‌شود.

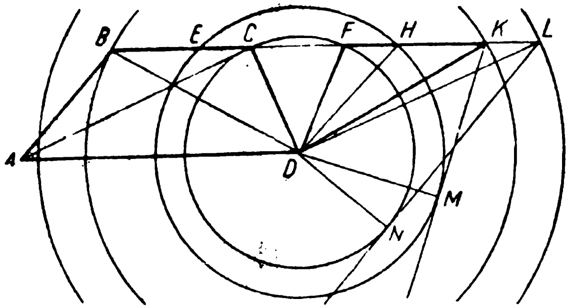
۲۶. در دایرهٔ به‌شعاع R، وتری رسم می‌کنیم که‌از مرکز به‌زاویهٔ 2α دیده شود؛ این وتر برابر است با ضلع a. برای ادامهٔ کار، مسألهٔ ۳۲ را ببینید.

۲۷. از نقطه‌های A و B، در جهت مثبت خطهای راست a و b، پاره‌خطهایی برابر s جدا می‌کنیم ونقطه‌های A' و B' را، که به‌این‌ترتیب به‌دست می‌آیند، به‌وسیلهٔ خطهای راستی به‌ترتیب به B و A وصل‌می‌کنیم. خط راستی که از نقطهٔ برخورد این دو خط راست و نقطهٔ O می‌گذرد، خطهای راست a و b را به‌ترتیب در نقطه‌های X و Y قطع می‌کند. اگر نقطهٔ O از دو خط راست مفروض به یك فاصله باشد، آن وقت مسأله یا بدون جواب می‌شود ویا بی‌نهایت جواب پیدا می‌کند.

۲۸. زاویهٔ بین خط‌المرکزین و وتر مجهول، معلوم است. وتر را موازی با خودش طوری منتقل کنید که یکی از دو انتهای آن از مرکز دایرهٔ مفروض بگذرد.

۲۹. مسأله را حل شده می‌گیریم. ذوزنقهٔ $ABCD$ (شکل ۱۷۸) را، ذوزنقهٔ مطلوب فرض می‌کنیم. پاره‌خطهای BH و CL را برابر AD جدامی‌کنیم. ازآن‌جا $\overline{AC} = \overline{DL}$ و $\overline{AB} = \overline{DH}$. علاوه بر آن $AB \| DH$ و $AC \| DL$، به‌نحوی که‌داریم: $\widehat{BAC} = \widehat{HDL}$؛ بنابراین دو مثلث ABC و HDL برابر می‌شوند و داریم: $\overline{HL} = \overline{BC}$. از آن‌جا که $\overline{HL} = \overline{BE}$، در نتیجه

$$\overline{KL} = \overline{HL} - \overline{HK} = \overline{BC} - \overline{BE} = \overline{EC} = \overline{FH}$$



شکل ۱۷۸

ازنقطهٔ K مماس KM را بردایرهٔ $D(H)$ واز نقطهٔ L مماس LN را بردایرهٔ $D(F)$ رسم می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$\overline{LN}^{۲}=\overline{CL}\cdot\overline{FL}\ ،\ \overline{KM}^{۲}=\overline{EK}\cdot\overline{HK}$$

ولی $\overline{CL}=\overline{EK}$ (زیرا $\overline{KL}=\overline{EC}$). بنابراین

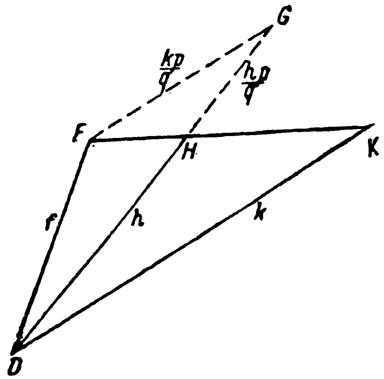
$$\overline{FL}:\overline{HK}=\overline{LN}^{۲}:\overline{KM}^{۲}$$

و در نتیجه

$$\overline{FH}:\overline{HK}=\frac{۱}{۲}(\overline{LN}^{۲}-\overline{KM}^{۲}):\overline{KM}^{۲}$$

زیرا $\overline{FH}=\overline{KL}=\frac{۱}{۲}(\overline{FL}-\overline{HK})$.

هریك از مماس‌های KM و LN را می‌توان به‌عنوان ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه از مثلث قائم‌الزاویه‌ای که وتر و ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ دیگر آن معلوم است، به‌کمك پاره‌خط‌های مفروض ساخت، به‌نحوی که با آغاز از این ساختمان، می‌توان دو پاره خط p و q را ساخت که نسبت آن‌ها برابر است با نسبت $\overline{FH}:\overline{HK}$. اگر مثلث FDK را رسم کنیم (شکل ۱۷۸)، به‌سادگی می‌توان ذوزنقهٔ مجهول را به‌دست آورد. بنابراین، مسألهٔ ما، منجر به‌مسألهٔ زیر می‌شود:



شکل ۱۷۹

پاره‌خط‌های f، h، k، p و q مفروض‌اند. می‌خواهیم مثلث FDK را طوری بسازیم که، برای آن، داشته باشیم: $DF = f$، $DK = k$، $DH = h$؛ در ضمن، H نقطه‌ای است روی پـاره‌خط FK، که آن‌را به‌نسبت $p:q$ تقسیـم می‌کند. حل مسألهٔ اخیر هم، روی شکل ۱۷۹ نشان داده شده است (ابتدا مثلث FDG را بسازید).

۳۰. در ضمن، از این قضیه استفاده کنید: اگر وسط دو ضلع مثلثی‌را به‌هم وصل کنیم، پاره‌خطی موازی با ضلع سوم و برابر با نصف آن به‌دست می‌آید.

۳۱. از نقطهٔ O وسط پـاره‌خط $AA' = a$، پاره‌خط OO_1 را روی آن و برابر وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای که دو ضلع دیگر آن برابر $\frac{a}{2}$ و $\frac{s}{2}$ باشد، جدا می‌کنیم. دایرهٔ به‌مرکز O و شعاع $\frac{s}{2}$، خـط راست را در نقطه‌هـای مطلوب، قطع می‌کند.

۳۲. شکل ۱۷ را ببینید. در حالت موردنظر ما، نقطهٔ C روی DB_1 قرار دارد.

۳۳. پاره‌خط‌های AB و DC وزاویهٔ بین‌آن‌ها را مفروض می‌گیریم (شکل ۱۷). ابتدا مثلث B_1CD را می‌سازیم کـه دو ضلع DC و CB_1 و زاویهٔ DCB_1 از آن معلوم است.

۳۴. بنابراین، پاره‌خط O'_2P وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌شود که ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن معلوم‌اند (مماس و شعاع دایرهٔ K_2) (§ ۲، مکان‌های هندسی a و e را ببینید).

۳۵. ابتدا مثلث هاشورخورده را رسم کنید (شکل ۲۱). مرکز دایره در نقطهٔ برخورد نیمسازهای دو زاویهٔ خارجی آن قرار دارد.

۳۶. کمان‌های AP_2 $P_1C = AP =$ و $P_2B = P_1C$ را جدا می‌کنیم. در این صورت، β وسط کمان $A\beta C$، α وسط کمان $C\alpha B$ و γ وسط کمان $B\gamma A$ خواهد بود.

۳۷. اگر X را نقطهٔ برخورد خط‌های راست B_1A و g، و Y را نقطه‌ای واقع بر g بگیریم، آن‌وقت، خط شکستهٔ AXB برابر پاره‌خط راست AXB_1 و خط شکستهٔ AYB برابر خط شکستهٔ AYB_1 می‌شود.

۳۸. مثلث ABC، در دوران دور ضلع A_1BC تبدیل می‌شود. اگر مثلث اخیر را، به‌نوبهٔ خود، دور A_1C دوران دهیم، به‌موقعیت A_1B_2C می‌رسد. نقطه‌های P_2،Y_1،X،P روی خط راست قرار می‌گیرند و پاره‌خط PP_2 برابر محیط مثلث XPY می‌شود.

۳۹. روی شکل ۲۵، نقطه‌های B_2 و B، همان نقطه‌های M و N هستند.

۴۰. دو شکل هم‌نهشت واقع بر یك صفحه را، وقتی هم جهت گویند که برای انطباق آن‌ها بریکدیگر، لزومی به‌جدا کردن یکی از آن‌ها از صفحه نباشد. اگر دو قطر مستطیلی را رسم کنیم و دو مثلث قائم‌الزاویه‌ای را در نظر بگیریم که در یك ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه مشترك باشند و قطرهای مستطیل وترهای آن‌ها را تشکیل دهند، با دو مثلث قائم‌الزاویه‌ای سروکار داریم که هم‌جهت نیستند. دو شکل متشابه را وقتی هم‌جهت گویند که، اگر یکی از آن‌ها را درعددی ضرب کنیم، شکلی هم‌نهشت بادیگری وهم‌جهت با آن به‌دست آید.

۴۱. داریم:

$$\widehat{AOA_2}=\widehat{BOB_2} \text{ و } \widehat{AA_2O}=\widehat{ASO}=\widehat{BB_2O}$$

بنابراین دو مثلث AOA_2 و BOB_2 متشابه‌اند. اگر اولی را به‌اندازهٔ زاویهٔ $AOA_2=\alpha$ دور O دوران دهیم، نقطه‌های A و B به‌ترتیب برخطهای راست OA_2 و OB قرار می‌گیرند و خط راست AB موازی خط راست A_2B_2 می‌شود.

۴۲. این مساله، حالت خاصی از مسالهٔ قبل است.

۴۳. ازنقطهٔ P واقع در خارج دایرهٔ O، دو مماس PP_1 و PP_2 را بر آن رسم می‌کنیم. خطهای راست PO و P_1P_2 را هم، که در نقطهٔ Q به‌هم برمی‌خورند، رسم می‌کنیم. سپس، خط راست Q_1Q_2 را، که از نقطهٔ P می‌گذرد، موازی P_1P_2 می‌کشیم. خطهای راست P_1P_2 و Q_1Q_2 را، به‌ترتیب، قطبی نقطه‌های P و Q نسبت به‌دایرهٔ O می‌نامند برعکس، نقطه‌های P و Q، به‌ترتیب، قطب‌های دوخط راست P_1P_2 و Q_1Q_2 نسبت به‌دایرهٔ O هستند.

۴۴. اگر بین نقطه‌های دو دستگاهی که یکی دیگری را می‌پوشاند، این رابطه برقرار باشد که، اگر نقطهٔ P از دستگاه اول متناظر با نقطهٔ P' از دستگاه دوم باشد، نقطهٔ P' ازدستگاه اول هم متناظر با نقطهٔ P ازدستگاه دوم بشود، گویند دو دستگاه یك گستره یا یك گسترهٔ معکوس راتشکیل دهند.

به‌این ترتیب، دستگاه نقطه‌های P ازخط راست g و دستگاه‌نقطه‌های معکوس آن P'، که یکی دیگری را می‌پوشاند، تشکیل یك گستره می‌دهند.

۴۵. چون $\widehat{OQ'P'}=\widehat{P'PQ}$، پس $\widehat{P'PQ}+\widehat{P'Q'Q}=2d$.

نقطه‌های P، P'، Q، Q' روی محیط یك دایره واقع‌اند. اگر طول مماسی که از نقطهٔ O براین دایره رسم می‌کنیم، برابر q باشد، داریم:

$q^2=\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=r^2$، $q=r$.

۴۶. اثبات دقیق‌تر را می‌آوریم. نقطهٔ برخورد منحنی‌های C_1 و C_2 را M می‌نامیم؛ از نقطهٔ O، مرکز انعکاس، خط راست a را رسم می‌کنیم که منحنی‌های C_1 و C_2 را، به‌ترتیب، در نقطه‌های A_1 و A_2 قطع می‌کند. منعکس‌های آن‌ها را، با همین حرف‌ها، و با اضافه‌کردن علامت پریم «$'$»، نشان می‌دهیم. با توجه به‌شکل ۳۳ داریم: $\widehat{A_1MA_2}=\widehat{A'_1M'A'_2}$. اگر

نیم‌خط a را، درجهت موقعیت حدی OM، دوران دهیم، نقطه‌های A_1 و A_2 به‌سمت M و نقطه‌های A'_1 و A'_2 به‌سمت M' نزدیك می‌شوند؛ در ضمن زاویهٔ A_1MA_2، به‌سمت زاویهٔ حدی α، زاویهٔ بین مماس‌های بر C_1 و C_2 در نقطهٔ M، میل می‌کند؛ به همین ترتیب، زاویــهٔ $A'_1M'A'_2$ هم به‌سمت زاویهٔ متنــاظر خود، α'، میل خواهدکرد. از برابری همیشگی دو زاویهٔ A_1MA_2 و $A'_1M'A'_2$، می‌توان برابری حدهای آن‌ها، یعنی α و α' را نتیجه گرفت. یعنی زاویهٔ بین مماس‌های برمنحنی‌هــای C_1 و C_2 در نقطهٔ برخوردشان M، برابر است بازاویهٔ بین‌مماس‌های برمنحنی‌های C'_1 و C'_2 در نقطهٔ M'.

۴۷. دراین‌جا، هرنقطه‌ازمحور اصلی، نسبت به‌همهٔ دایره‌های‌موردنظر، به‌یك قوت است.

۴۸. یعنی قوت نقطهٔ P نسبت به‌این دایره، برابر است با p^2.

۴۹. قطرها، دایره‌های هم مرکزرا، تحت زاویهٔ قــائمه قطع می‌کنند. انتهای تکهٔ ۳، d را ببینید.

۵۰. دایرهٔ K متناظر بــا خودش است؛ دایرهٔ K'_1، منعکس K_1، K را در همان دونقطه‌ای قطع می‌کندکه با دایرهٔ K_1 مشترك است. به‌جز این، چون K_1، عمود بر K است، بنابراین، منحنی‌های معکوس‌آن‌ها، K'_1 و K هم بریکدیگر عمود خــواهند بود (انتهای ۳، d را ببینید). بنــابراین، دو دایرهٔ K_1 و K'_1 برهم منطبق‌اند.

۵۱. از نقطه‌نظــر صوری، دایرهٔ حقیقی K_1 و دایرهٔ انعکاس موهومی K، یکدیگر را تحت زاویهٔ قــائمه قطع می‌کنند. O را مرکــز دایرهٔ K_1 می‌گیــریم؛ OP را l و شعاع دایرهٔ K_1 را r فرض می‌کنیم. اگر O را مبداء مختصات و OP را جهت مثبت محور طول بگیریم، آن وقت، معادلهٔ دایره‌های K_1 و K و دایرهٔ به‌قطر PO، به‌ترتیب، چنین است:

$$x^2+y^2-r^2=0;\quad (x-l)^2+y^2+r^2-l^2=0;$$

$$\left(x-\frac{l}{2}\right)^2+y^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2=0$$

دایرهٔ سوم از نقطه‌های موهومی برخورد دو دایرهٔ اول می‌گذرد. این نتیجه‌گیری، ناشی از اتحاد زیر است:

$$[x^۲+y^۲-r^۲]+[(x-l)^۲+y^۲+r^۲-l^۲]-$$
$$-۲\left[\left(x-\frac{l}{۲}\right)^۲+y^۲-\left(\frac{l}{۲}\right)^۲\right]=۰$$

زاویهٔ OiP، که راس موهومی آن برمحیط دایرهٔ به‌قطر OP قراردارد، یك زاویهٔ قائمه است. درعین حال، زاویهٔ OiP، یکی اززاویه‌های برخورد دودایرهٔ $K_۱$ و K است.

۵۲. شکل‌های منعکس، دوخط راست موازی‌اند.

۵۳. دربارهٔ محورهای تشابه، § ۷ را ببینید.

۵۴. اگر معادلهٔ دایرهٔ دلخواه K و معادله‌های دودایره‌ای را که نسبت به K منعکس یکدیگرند بنویسیم، قانع می‌شویم که دودایرهٔ اخیر در دونقطهٔ حقیقی یا موهومی (واقع برمحیط K) یکدیگر را قطع می‌کنند.

۵۵. انعکاس نسبت به‌مرکز $O_۱$، نقطهٔ X را بـه نقطهٔ Y می‌برد، سپس انعکاس نسبت به‌مرکز $O_۲$، آن را به‌نقطهٔ Z می‌رساند؛ انعکاس‌های بعدی آن را ابتدا به‌نقطهٔ O وسپس به‌خود نقطهٔ X منتقل می‌کند.

۵۶. شعاع دایره‌های K، $K'_۱$ و $K_۱$ را، روی شکل ۳۳، به‌ترتیب r، ρ و R و مرکزهای آن‌ها را، O، ω و $O_۱$ می‌گیریم. همچنین فرض‌می‌کنیم: $\overline{OQ}=t$، $\overline{OQ'}=\tau$، $OO_۱=a$ و $O\omega=\alpha$ (روی خط راست $OO_۱$، جهت مثبتی، انتخاب می‌شود که علامت عددهای $OO_۱$ و $O\omega$ را معین می‌کند).

بارسم شعاع‌های $\omega Q'$ و $O_۱Q$ داریم:

$$t\cdot\tau=r^۲\ ,\ \frac{\alpha}{a}=\frac{\rho}{R}=\frac{\tau}{t}=\frac{r^۲}{t^۲}=\frac{r^۲}{a^۲-R^۲},$$

$$\alpha=\frac{ar^۲}{a^۲-R^۲}\ ;\ \rho=\frac{Rr^۲}{a^۲-R^۲} \qquad (۱)$$

اکنون دایره‌های $O_۱(R_۱)$، $O_۲(R_۲)$ و $O_۳(R_۳)$ را درنظر می‌گیریم

و فرض می کنیم که سه‌دایرهٔ $\omega_1(\rho_1)$، $\omega_2(\rho_2)$ و $\omega_3(\rho_3)$، منعکس‌های آن‌ها درانعکاس $O(r)$ باشند.

اگر نقطه‌های ω_1 و ω_2 و ω_3 روی خط‌راست k باشند، می‌توان k را دایرهٔ (مسخ‌شده‌ای) دانست که بردایره‌های $\omega_1(\rho_1)$، $\omega_2(\rho_2)$ و $\omega_3(\rho_3)$ عمود است. بنابراین، تصویرمعکوس خط‌راست k، عبارت است از دایرهٔ K که ازمرکزانعکاس O می گذرد و بردایره‌های $O_1(R_1)$، $O_2(R_2)$ و $O_3(R_3)$ عمود است. برعکس، اگر مرکز انعکاس O برمحیط دایرهٔ K قرار گیرد، منعکس آن، خط‌راست k خواهد بود که بر دایره‌های $\omega_1(\rho_1)$، $\omega_2(\rho_2)$ و $\omega_3(\rho_3)$ عمود است و، بنابراین، از مرکزهای ω_1، ω_2 و ω_3 می گذرد. همیشه می‌توان سه‌دایرهٔ مفروض را، به کمك انعکاس، به‌سه دایره‌ای تبدیل کرد که مرکزهای آن‌ها بریك خط‌راست k واقع باشند.

$O_1(R_1)$، $O_2(R_2)$ و $O_3(R_3)$ را چنین دایره‌هایی فرض می کنیم. برای این‌که درانعکاس نسبت به $O(r)$، مرکزهای ω_1، ω_2 و ω_3 بر یك خط راست قرار گیرند، لازم وکافی است مرکز انعکاس O را روی خط‌راست k بگیریم که مرکزهای O_1، O_2 و O_3 روی آن واقع‌اند. فرض می کنیم این شرط برقرار باشد وبا انتخاب جهت مثبت دلخواهی بر k قرار می گذاریم: $a_1=OO_1$ ، $a_2=OO_2$ ، $a_3=OO_3$ ، $\alpha_1=O\omega_1$ ، $\alpha_2=O\omega_2$ ، $\alpha_3=O\omega_3$.

با توجه به‌رابطهٔ (۱) داریم:

$$\alpha_1=\frac{a_1r^2}{a_1^2-R_1^2}\,;\,\alpha_2=\frac{a_2r^2}{a_2^2-R_2^2}\,;\,\alpha_3=\frac{a_3r^2}{a_3^2-R_3^2};$$

$$\rho_1=\frac{R_1r^2}{a_1^2-R_1^2}\,;\,\rho_2=\frac{R_2r^2}{a_2^2-R_2^2}\,;\,\rho_3=\frac{R_3r^2}{a_3^2-R_3^2}$$

سپس اگر فرض کنیم: $O_1O_2=c_3$ و $O_2O_3=c_1$ (با توجه به علامت آن‌ها)، آن‌وقت

$$a_1-a_2=c_3\ ;\ a_2-a_3=c_1 \qquad (2)$$

در ضمن، c_3 و c_1 به موضع مرکز انعکاس، بستگی ندارند. از سه مرکز ω_1،

ω_2 و ω_3، آخری به‌یك فاصله از دو تای دیگر است

$$\alpha_1+\alpha_2=2\alpha_3 ,$$

$$\frac{a_1}{a_1^2-R_1^2}+\frac{a_2}{a_2^2-R_2^2}=\frac{2a_3}{a_3^2-R_3^2} \qquad (3)$$

سرانجام ، اگر بخواهیم داشته باشیم: $\rho_1=\rho_2$ ، باید برابری زیر برقرار باشد:

$$\frac{R_1}{a_1^2-R_1^2}=\frac{R_2}{a_2^2-R_2^2} \qquad (4)$$

به‌این ترتیب، اگر بخواهیم، بـه‌کمك انعکاس، سـه دایرهٔ $O_1(R_1)$، $O_2(R_2)$ و $O_3(R_3)$ را بـه سه دایرهٔ شکل ۳ تغییر دهیم، باید چهار معادلهٔ (۱)، (۲)، (۳) و (۴) برای سه مقدار a_1، a_2 و a_3 برقرار باشد، ازاین‌جا معلوم می‌شود که، مؤلف، دراین حکم که، مسالهٔ آپولونیوس به کمك دوانعکاس به‌حالتِ خاص شکل ۳ منجر می‌شود، اشتباه‌کرده است.

۵۷. دایرهٔ M_1، دراین انعکاس، متناظر دایرهٔ M_2 است.

۵۸. روشن است که نقطهٔ A، مرکز تشابه خارجی دایره‌های K_1 و K_2 است، زیرا دومماس مشترك خارجی دایره‌ها، ازاین نقطه می‌گذرند.

۵۹. چهارضلعی کامل به‌شکلی ازصفحه گفته می‌شود که شامل چهارخط راست نامحدود باشد. چهارضلعی کامل، شش راس دارد. هـر دو رأسی از چهارضلعی کامل که متعلق به‌یك ضلع نباشند، راس‌های روبه‌رونامیده می‌شوند.

۶۰. ایـن حکم را قضیهٔ دزارگ (*Desargues*) می‌نـامند، بـه نام هندسه‌دان سدهٔ هفدهم فرانسه، که برای نخستین‌بار آن‌را طرح کرده است.

۶۱. نقطه‌های O، O' و، مثلاً، A، A' بـر صفحه‌ای قرار دارند که به‌وسیلهٔ دوخط راست OA و OA'، که درنقطهٔ A'' متقاطع‌اند، معین می‌شود.

۶۱a. این دوصفحه‌عبارتند ازصفحه‌های مماس‌مشترك همهٔ‌مخروط‌هایی که به‌وسیلهٔ نقطه‌های خط‌راست g معین می‌شوند.

۶۲. صفحهٔ xy ازدستگاه محورهای مختصات قائم برصفحه‌ای که از قاعده‌های دومخروط P_1 و P_2 می گذرد انتخاب می کنیم، مبداء مختصات را

مرکز O_1 و محور x را خط‌المرکزین O_1O_2 می‌گیریم. اگر شعاع قاعده‌های دومخروط را r_1 و r_2 بگیریم، آن‌وقت دو سطح مخروطی را می‌توان با معادله‌های زیر بیان کرد:

$$z=r_1-\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ z=r_2-\sqrt{(d-x)^2+y^2}$$

که‌در آن $d=O_1O_2$. اگر بین این‌دومعادله، y را حذف کنیم، به‌دست‌می‌آید:

$$(r_1-r_2)[z+r_1+r_2]=d(-2x+d)$$

یعنی صفحه‌ای که‌منحنی مقطع مخروط‌ها، روی آن واقع است. به‌ازای $z=0$، معادلهٔ محوراصلی دایره‌های O_1 و O_2 به‌دست می‌آید که، درعین حال، معادلهٔ اثر صفحهٔ مذکور برصفحهٔ XY است.

۶۳. با توجه به‌ویژگی‌های توافقی قطب‌ها.

۶۴. چهار خط راستی که از نقطهٔ برخورد خط‌های راست مفروض می‌گذرند.

۶۵. مسالهٔ ۷۰ ویادداشت ۴۷ را ببینید.

۶۶. در هردوحالت، منحنی برصفحه‌ای قرار داردکه ازخط دومرکز می‌گذرد و برصفحهٔ شکل عمود است. اگر خط دومرکز را محور xها وخط راست عمود بر آن را درنقطهٔ برخوردش با محور اصلی دسته، محور yها بگیریم، آن‌وقت، معادلهٔ منحنی درحالت اول به‌صورت

$$y^2-x^2=a^2$$

و درحالت دوم به‌صورت

$$x^2-y^2=p^2$$

درمی‌آید. درضمن، a برابر است با نصف پاره‌خط بین نقطه‌های اصلی و p عبارت است از قوت مبداء نسبت به‌همهٔ دایره‌های دسته.

به‌این ترتیب، در هر دوحالت یك هذلولی متساوی‌الساقین به دست می‌آیدکه محورهای مختصات، محورهای تقارن آن هستند.

درحالت‌اول، با آغازیادداشت۶۸، می‌توان راه‌حل ساده‌تری به‌دست آورد.

۶۷. مسالهٔ ۷۰ را ببینید.

۶۸. مکان هندسی نمایش فضایی دایره‌هایی که از نقطهٔ مفروض می گذرند، عبارت است از یك سطح مخروطی که راس آن در نقطهٔ مفروض است؛ درضمن مولدهای سطح مخروطی با صفحهٔ شکل، زاویه‌ای برابر ۴۵ درجه می‌سازند. مسالهٔ ۹۳ و یادداشت ۷۱ را ببینید.

منحنی مجهول، عبارت است از دو هذلولی که درفصل مشترك دوسطح مخروطی قرار دارند.

۶۹. دوصفحه که از خطراست مفروض می گذرند وبا صفحهٔ شکل، زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازند.

۷۰. دوسهمی که نسبت به صفحهٔ شکل متقارن‌اند و روی دو صفحه‌ای قرار دارندکه صفحهٔ شکل را درخط مفروض به‌زاویهٔ ۴۵ درجه قطع‌می‌کنند (یادداشت‌های ۶۷ و ۶۹ را ببینید).

۷۱. دو سطح مخروطی قائم‌الزاویه که پاسخ‌گوی دایرهٔ مفروض‌اند (شکل ۴۷ را ببینید).

۷۲. دو هذلولی‌که در محل برخورد سطح‌های مخروطی قائم‌الزاویهٔ متناظر با دایره‌های مفروض قراردارند (شکل ۴۷ را ببینید).

۷۳. تاکید براین‌مطلب را مفید می‌دانیم‌که روش تقریبی را نمی‌توان راه حل دانست؛ روش تقریبی، راهی است‌که تنها در برخی موردهای عملی می‌تواند جانشین راه‌حل شود.

۷۴. روشن است‌که این وسیلهٔ رسم، علاوه بر اصل موضوع‌های I و II و VI، پاسخ‌گوی اصل موضوع III است (مقدمه را ببینید). باید متذکرشدکه، دراین فصل، مؤلف ازتصویرهایی استفاده می‌کندکه نمی‌توان آن‌ها را جانشین رسم کرد (مثلاً، به‌وسیلهٔ نقطه‌های A، B، A' ازشکل ۵۳ نمی‌توان حتی یك نقطه درخارج خطراست AB به‌دست آورد). همان‌طور که در مقدمه گفته شد، برای این‌که بتوانیم از چنین تصویرهای دلخواهی استفاده‌کنیم، باید شرط‌های خاصی را در نظر بگیریم. در کنار ابزارهای رسم،که به‌وسیلهٔ مؤلف در §§ ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲ مورد استفاده قرار گرفته است، می‌توان مثلاً شرط‌های زیر را اضافه‌کرد:

α. هر نقطهٔ دلخواه‌واقع درخارج خط‌راست مفروض را می‌توان رسم شده به‌حساب آورد.

β. هر نقطهٔ دلخواه‌واقع برخط‌راست‌مفروض را، که‌منطبق برهیچ کدام از نقطه‌هائی که قبلاً ساخته‌شده‌اند نیستند، می‌توان رسم شده به‌حساب آورد.

۷۵. اثبات را می‌توان براساس ویژگی‌های توافقی چهارضلعی کامل پیدا کرد.

۷۶. هرجا صحبت برسر تصویری باشد که درصفحهٔ شکل در دسترس نیست، از نقطه‌نظر صوری، به‌معنای آن است که با اضافه‌کردن شرط تازه‌ای، استفاده از شرط‌های مفروض قبلی را، محدودتر کرده‌ایم.

بنابراصل موضوع III (مقدمه را ببینید)، نقطهٔ‌برخورد دوخط‌راست a و b را رسم شده به حساب می‌آوریم و بنا بــراصل موضوع I می‌توانیم خط‌راست واصل بین این نقطهٔ برخورد و نقطهٔ مفروض P را هم رسم شده درنظر بگیریم؛ ولی درحالت موردنظر، قاعدهٔ استفاده از شرط اخیر را کنار می‌گذاریم.

اهمیت عملی چنین محدودیت‌هایی، به‌خودی خود معلوم است.

۷۷. دقیق‌تر: صورت و مخرج ، بزرگتر از صورت و مخــرج نسبت قبلی نیستند، درضمن، دست‌کم یکی از جمله‌های کسر ازجملهٔ نظیر خود در کسر قبلی کوچکتر است.

۷۸. براساس §۱۰، ۴، با این فرض‌ها می‌توان یك متوازی‌الاضلاع ساخت و برعکس.

۷۹. $\overline{GC}=\overline{HB}=\overline{XD}$، $\overline{EC}=\overline{ED}$؛ $\widehat{GCE}=\widehat{XDE}=۴۵^\circ$؛ دو مثلث GCE و XDE برابرند و داریم: $\widehat{GEC}=\widehat{XED}$.

چون $\widehat{DEG}+\widehat{GEC}=d$، پس $\widehat{XEG}=\widehat{XED}+\widehat{DEG}=d$.

۸۰. زیرا cوb نیمسازهای زاویه‌های بین دوخط راست dوa هستند.

۸۱. دراین بند، اصل‌موضوع‌های I ، II و III به‌جای خود باقــی هستند (مقدمه را ببینید). به‌جای اصــل موضوع‌های IV و V باید دو اصل موضوع زیر را قرار داد:

IV'. باید دایره‌ای مثل K ومرکزآن، O را، رسم‌شده به‌حساب آورد.

V'. نقطه‌های برخورد خطهای راست مفروض و یا خطهای راست رسم شده را با دایرهٔ K، باید رسم‌شده به‌حساب آورد.

باید یادآوری کرد که، نسبت به‌عنصرهای دلخواه، علاوه‌برشرطهای α و β از یادداشت ۷۴، می‌توان شرط زیر را هم اضافه‌کرد:

γ. می‌توان هر نقطهٔ دلخواه واقع برمحیط دایرهٔ K را، که برنقطه‌های رسم‌شده منطبق نیستند، رسم‌شده به‌حساب آورد.

۸۲. این مورد به‌روشنی کامل نشان می‌دهد که دیدگاه عملی تا چه‌حد می‌تواند مانع روشن‌کردن ماهیت موضوع باشد. عمل‌های اصلی که به‌کمك پرگار و خط‌کش انجام می‌شود و به‌وسیلهٔ مولف نام برده شده‌اند، در عمل یکدیگر را می‌پوشانند: عمل‌های دوم و سوم برعمل اول، و عمل‌های پنجم و ششم بر عمل چهارم منطبق‌اند. راحت‌تر این است‌که مساله را از دیدگاه صوری، از دیدگاه اصل موضوع‌های پذیرفته شده، مورد بررسی قرار دهیم (مقدمه را ببینید). البته، در واقع، مولف هم متوجه آن‌ها بوده است، زیرا می‌توان عمل ۱ را با اصل موضوع I، عمل ۲ را با اصل موضوع III، عمل IV را با اصل موضوع II، عمل ۶ را با اصل موضوع V وبالاخره، عمل‌های ۳ و ۵ را با اصل موضوع IV مقایسه کرد.

۸۳. به‌زبان دیگر، اگر به‌جای اصل‌موضوع‌های I،II،III،IVوV، اصل موضوع‌های دیگری را گذاشته باشیم، برای این‌که ثابت کنیم هرمسالهٔ درجه دوم را می‌توان به‌کمك آن‌ها حل کرد، لازم و کافی است ثابت کنیم‌که، وقتی اصل موضوع‌های اخیر را پذیرفته‌ایم، خودبه‌خود اصل موضوع‌های قبلی هم برقرارند.

۸۴. اگر بخواهیم برکار و دیدگاه عملی تکیه‌کنیم، نمی‌توانیم دایره را با معلوم‌بودن چند نقطه از محیط آن، رسم‌شده به‌حساب آوریم. درعمل، به‌جای پرگار، هیچ‌وسیلهٔ دیگری برای رسم دایره مفید واقع نمی‌شود. بنابراین، باید پرگار را برای رسم دایره حفظ‌کرد (عمل ۴)، ولی آن را، برای پیداکردن نقطه‌ها، به‌کار نبرد (عمل‌های ۵ و ۶). یادداشت ۸۱ راهم ببینید.

۸۵. در دو دستگاه نقطه‌های K_1 و K، نقطهٔ A مرکز تشابه و نسبت

$\overline{MP}:\overline{OP'}$ نسبت تشابه است . به‌ازای این مرکز تشابه و این نسبت تشابه، هر نقطهٔ H از خط راست g، متناظر با نقطهٔ H' از خط راست g' است.

۸۶. مضمون واقعی قضیهٔ شتینر، در یادداشت ۸۱ روشن شده است.

۸۷. در دایره، دوخط‌راست‌موازی با یکی‌ازضلع‌های‌متوازی‌الاضلاع (مسالهٔ ۱۱۲را ببینید) و، سپس‌دوخط‌راست دیگر (مجاورخط‌های‌راست‌اول) موازی ضلع دیگر متوازی‌الاضلاع رسم می‌کنیم. در هر ذوزنقه‌ای‌که به‌این ترتیب به‌دست می‌آید، خط راستی را می‌کشیم که محل برخورد قطرها را به‌محل برخورد دو ضلع غیرموازی آن وصل می‌کند. از برخورد دو خط راست اخیر، مرکز مجهول دایره به‌دست می‌آید (با قضیهٔ §۱۰،۱ مقایسه کنید).

۸۸. این‌بار، از اصل موضوع‌های عادی، تنها اصل موضوع‌های I،II،V و VI نگه داشته شده است.

با آن‌که مؤلف، تنها براستفادهٔ از پرگار تأکید می‌کند، برای رسم خط‌های‌راست، وجودخط‌کش‌لازم‌است (عمل۱، بایاداشت۸۴ مقایسه‌کنید)؛ تنها برای پیداکردن‌نقطه‌ها، نباید ازخط‌کش استفاده‌کرد (عمل‌های ۲ و۳). روشن است‌که چنین شرطی، بهترمی‌تواند ماهیت استفادهٔ محدود از ابزارها را مشخص کند.

در این‌جا لزومی ندارد شرط‌های تازه‌ای را وارد کنیم، زیرا همهٔ تصویرهای دلخواهی را که مورد استفادهٔ مولف قرار می‌گیرد، می‌توان رسم‌شده به‌حساب‌آورد (باید توجه‌کردکه شرط‌های مذکور در مقدمه، همه تصویرهای هندسی دستگاه نقطه‌ها را می‌دهند).

۸۹. پاره‌خط RH را می‌توان از مثلث ROG، که در آن زاویهٔ ROG برابر۶۰ درجه‌است، به‌دست‌آورد (زیرامثلث ROGمتساوی‌الاضلاع است).

۹۰. حرف R ($Rectus$)، علامت زاویهٔ قائمه است.

۹۱. در این‌جا هم می‌توان از قاعده‌ای که در مسالهٔ ۱۴۲ (شکل ۷۳)، برای ساختن nامین بخش پاره خط مفروض به‌کاربردیم، استفاده‌کرد؛ این‌روش، تقریباً همان روشی است که مؤلف در متن‌کتاب به‌کار برده، ولی

به‌یك دایره کمتر نیاز دارد.

۹۲. از نظر صوری، توضیح‌های این قسمت به‌اندازهٔ کافی‌قانع کننده نیستند.

می‌گوییم مساله وقتی می‌تواند به‌طور دقیق حل شود که عنصرهـای مجهول‌آن را بتوان تنها براساس شرط‌هایی‌که وارد ویا اصل موضوع‌هایی که برقرار کرده‌ایم رسم‌کرد. برعکس، وقتـی مساله به‌طور دقیق حل نشده است‌که به‌جای عنصرهای مجهول، عنصرهای دیگری ساخته شده باشد.

دربارهٔ واردکردن شرط‌ها، مطلب به‌حوزه‌ای مربوط می‌شودکه مورد بررسی ماست. معمولاً از شرط‌هایی استفاده می‌شودکه در مقدمه نشان داده شده است، ولی اگر از شرط‌های دیگری هم استفاده شود، نمی‌تـوان گفت که دقت راه‌حل کمتر است. مثلاً، اصل موضوع زیر را درنظر بگیرید:

اگر یك خط راست و دونقطه در بیرون آن مفروض باشد، دونقطه‌ای از خط راست، که از آن‌جا پاره خط بین دو نقطهٔ مفروض به‌زاویهٔ قائمـه دیده می‌شود، مفروض به‌حساب می‌آید.

دراین‌صورت، نقطهٔ مجهول X، که درمتن مساله وجود دارد، مستقیماً و به‌کمك این شرط، مفروض به‌حساب می‌آید؛ به‌این ترتیب، مسأله با دقت کامل قابل حل است.

وقتی با رسم سروکار داریم، ایـن شرط متناظر حرکت‌دادن زاویـهٔ قائمه است (که درمتن از آن صحبت شده است).

۹۳. یادداشت ۸۳ را ببینید.

۹۴. یادداشت ۸۴ را ببینید.

۹۵. شرط‌های صوری لازم، برای استفاده ازخط‌کش بادولبهٔ موازی (و به‌فاصلهٔ a از یکدیگر) را می‌آوریم.

اصل موضوع‌های I،II،III و VI از مقدمـه، به‌قوت خود بـاقی مانده‌اند. به‌جز آن‌ها، اصل موضوع‌های زیر را هم در نظر می‌گیریم:

اگر خط راست g مفروض یا رسم شده باشد، آن‌وقت دوخط راست موازی g و به‌فاصلهٔ a از آن نیز رسم شده به‌حساب می‌آید.

اگر دونقطه داشته باشیم‌که فاصلهٔ بین آن‌ها از a کمتر نباشد، آن‌وقت

دو زوج خط راست، که دو به‌دو با هم موازی و به‌فاصلهٔ a از یکدیگرند و درضمن از نقطه‌های مفروض می‌گذرند، رسم‌شده به‌حساب می‌آیند.

اصل موضوع اول پاسخ‌گوی این عمل، در حوزهٔ رسم، است که یکی از لبه‌های خط‌کش دو لبه را کنار خط راست مفروض قرار می‌دهیم؛ اصل موضوع دوم هم متناظر با قراردادن خط‌کش درصفحهٔ شکل است، به‌نحوی که یك لبهٔ آن از یکی از نقطه‌های مفروض و لبهٔ دیگرش از نقطهٔ مفروض دیگر بگذرد؛ این عمل را به‌دو طریق می‌توان انجام داد (شکل ۹۷ را ببینید).

درعین حال، شرطهای α و β از یادداشت ۷۴ هم، دربارهٔ عنصرهای دلخواه، به‌قوت خود باقی‌اند.

۹۶. دراین‌باره می‌توانید به‌کتاب انریك ($F.Enriques$) هم‌مراجعه کنید. عنوان کتاب چنین است:

Fragen der Elementar geometrie (صفحهٔ ۱۳۵)

۹۷. اصل موضوع‌های عادی I، II، III و VI به قوت خود باقی‌اند. به‌جز آن‌ها، اصل موضوع‌های زیر را هم، وارد می‌کنیم:

خط راست عمود برخط‌راست مفروض راکه ازنقطهٔ مفروضی بگذرد، رسم شده و مفروض به‌حساب می‌آوریم.

نقطه‌ای از خط راست مفروض راکه از آن بتوان پاره‌خط مفروض را به‌زاویهٔ قائمه مشاهده کرد، مفروض به‌حساب می‌آوریم.

اصل موضوع اول، متناظر با این عمل رسم است که یك‌ضلع زاویهٔ قائمه را درکنار خط راست مفروض قرار می‌دهیم و با لغزاندن آن روی خط‌راست‌مفروض، آن را به‌وضعی‌می‌رسانیم که ضلع دیگرش از نقطهٔ مفروض بگذرد. اصل موضوع دوم هم، متناظر با عمل زیر است (که البته کمتر به‌کار می‌رود): دو ضلع زاویه‌را از دوانتهای پاره‌خط مفروض می‌گذرانیم و با جابه‌جاکردن زاویه، خود را به‌وضعی می‌رسانیم که رأس آن روی خط راست مفروض قرارگیرد.

دربارهٔ عنصرهای دلخواه، شرط زیر را درنظر می‌گیریم:

هرنقطهٔ دلخواه واقع درخارج خط‌راست‌مفروض‌را، مفروض به‌حساب

می آوریم.

ضرورت وجود شرط یا شرطهایی در بارهٔ عنصرهای دلخواه (تا بتوان به‌کمك ابزارهای تازه، هرمسألهٔ درجه دوم را حل کرد) روشن‌است؛ مثلا، بدون‌وجود هیچ‌شرطی، وتنها به‌کمك اصل موضوع‌های فوق،نمی‌توان پاره‌خطی را که به‌وسیله دو انتهای آن داده شده است، نصف کرد، زیرا به‌هیچ نقطهٔ دیگری، جز دو انتهای مفروض پاره‌خط، نمی‌توان دست یافت.

۹۸. می‌توان زاویهٔ α را مخالف با ۹۰ درجه گرفت (این حالت خاص، دربند قبلی مورد مطالعه قرارگرفته است).

اصل موضوع‌های متناظر با این وسیله، کاملاً با آن‌چه در یادداشت ۹۷ گفتیم، شباهت دارد. تنها باید شرط مربوط به‌عنصرهای دلخواه راحذف کرد، زیرا نیازی به‌آن نیست: همهٔ عنصرهای دلخواه موردنیاز این بند را، می‌توان ساخت.

۹۹. اصل موضوع‌های عادی I، II، III و VI به قوت خود باقی‌اند. به‌جز آن‌ها، باید این شرط را هم اضافه‌کرد:

روی خط‌راست مفروض، بایدنقطه‌ای‌راکه به‌فاصلهٔ a ازنقطهٔ‌مفروض واقع براین خط راست قرار دارد، مفروض به حساب آورد (a عبارت است از مقیاس طول).

دربارهٔ عنصرهای دلخواه، باید همان شرط معمولی را وارد کرد (یادداشت ۹۷ را ببینید).

۱۰۰. استفاده از نیمسازنگار، متناظر با اصل موضوع زیراست:

اگر دوخط راست، رسم شده یا مفروض باشند، خط راست نیمساز زاویهٔ بین آن‌ها هم، مفروض به‌حساب می‌آید.

۱۰۱. نماد $\barwedge$، بستگی تصویری را نشان می‌دهد.

۱۰۲. حکم اخیر را می‌توان به سادگی و براساس برابری زیر ثابت کرد:

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{BA'}}=-\frac{\overline{AB'}}{\overline{BB'}}$$

۱۰۳. اگر نقطه‌های برخورد این نیم‌خط‌ها را با خط راست موازی یکی از نیمسازها درنظر بگیریم وازآن‌چه در یادداشت متن گفته شده است استفاده کنیم، به‌این موضوع قانع می‌شویم.

۱۰۴. روی خط راست مفروض، مبداء و جهت دلخواهی انتخاب می‌کنیم و طول نقطه‌های A، A'، M، M'، X، X' را، به ترتیب، a، a'، m، m'، x، x' می‌نامیم.

در این صورت، بنابرخاصیت نقطه‌های X و X' باید داشته باشیم:

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{A'X}}=-\frac{\overline{AX'}}{\overline{A'X'}}\ ,\ \frac{\overline{MX}}{\overline{M'X}}=-\frac{\overline{MX'}}{\overline{M'X'}}$$

و یا

$$\frac{x-a}{x-a'}=-\frac{x'-a}{x'-a'}\ ,\ \frac{x-m}{x-m'}=-\frac{x'-m}{x'-m'}$$

که از آن، درستی حکم متن، به‌سادگی ثابت می‌شود.

۱۰۵. بحث دقیق‌تر در بارهٔ مفهوم عنصرهای بی‌نهایت دور را می‌توان درکتاب ۱. ل. بونیتسکی پیدا کرد.

۱۰۶. که متناظر است با اصل موضوع‌های I، II، III، VI و اصل موضوع زیر:

محل برخورد خط‌های راست مفروض، با مقطع مخروطی K،مفروض به‌حساب می‌آید.

۱۰۷. کتاب ف. ۱نریك سابق‌الذکر را ببینید.

۱۰۸. دو عبارت رادیکالی را مزدوج گویند، وقتی که تنها در علامت برخی از رادیکال‌ها، با هم اختلاف داشته باشند.

۱۰۹. معادله جبری باضریب‌های گویای

$$a_۰x^n+a_۱x^{n-۱}+\dots+a_{n-۱}x+a_n=۰$$

را غیرقابل تحویل گویند، وقتی که عبارت سمت چپ آن قابل تجزیه به‌عبارت‌هایی با ضریب‌های گویا نباشد. این وضع در مورد معادلهٔ درجه

سوم، به‌معنای آن است که، معادله، ریشه‌های گویا ندارد.

۱۱۰. چه در این‌جا وچه بعد از آن، نظر مؤلف به‌معادله‌های غیرقابل تبدیلی است که ضریب‌های گویا داشته باشند. یادداشت قبلی را ببینید.

۱۱۱. مولف در پرده، فرض را بر ایــن می‌گیرد که نقطه‌های متفاوت صفحه، باید متناظر با عددهای مختلف نابرابر باشند.

۱۱۲. $k = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots l^{\lambda}$ می‌گیریم، که در آن، a، b، c، l عددهای اول مختلف و α،β،γ،...،λعددهایی طبیعی‌هستند. عددهای a^{α}،b^{β}، c^{γ}،...،l^{λ}، دو به‌دو نسبت به‌هم اول‌اند.

از حکمی کــه در شمارهٔ ۱ تنظیم شده است، نتیجه می‌شود: بـرای این‌که بتوان محیط دایره را به k بخش برابر تقسیم کرد، کافی است بتوانیم آن‌را به a^{α}،b^{β}، c^{γ}،...، l^{λ} بخش برابر تقسیم کنیم (لزوم این شرط، خود به‌خود واضح است). اگر در مورد عددهای a^{α}، b^{β}، c^{γ}،...،l^{λ}، قضیهٔ گوس را، که درشمارهٔ ۲ شرح داده شده است، درنظر بگیریم، به‌قضیهٔ کلی‌زیر می‌رسیم:

برای این‌که بتوان محیط دایره را به k بخش برابر تقسیم کرد، لازم وکافی است که عدد k به‌صورت زیر باشد:

$$k = ۲^{r} p_{۱} p_{۲} \cdots p_{m}$$

که در آن $r = ۰،۱،۲،۳،\ldots$؛ و $p_{۱}$، $p_{۲}$،...،p_{m}، عددهای مختلف اولی‌هستند که هر کدام از آن‌ها را می‌توان به‌صورت زیر نوشت.

$$p = ۲^{۲^{n}} + ۱$$

۱۱۳. بنا بر روایت مورخان، نخستین کسی که مسألهٔ تضعیف مکعب‌را حالت خــاصی از مسألهٔ تنظیم‌شده در متن کتاب دانست، هیپوکرات خیوسی بود (نیمهٔ دوم سدهٔ پنجم پیش از میلاد).

۱۱۴. از سه‌روش α، β و γ، که در متن آمده است، دو روش اول متعلق به هنایخموس هندسه‌دان یونــانی (حدود ۳۰۰ سال پیش از میلاد) و روش آخر متعلق به دکارت ریاضی‌دان فرانسوی است.

۱۱۵. در این‌حالت، با فرض صوری زیر سروکار داریم:

سهمی $y^2 = x$ و نقطه‌های برخورد آن را با دایره‌ای که از مبداء می‌گذرد و مرکز آن در نقطهٔ $\left(\frac{m}{2}, \frac{1}{2}\right)$ است، مفروض می‌گیریم.

۱۱۶. استفادهٔ از کنکوئید برای پیدا کردن نقطه‌های مجهول، متناظر با اصل موضوع‌های زیر است:

کنکوئید، قطب آن، پایهٔ آن و بازهٔ آن‌را مفروض و رسم‌شده به‌حساب می‌آوریم.

محل برخورد کنکوئید مفروض را با خط راست (دایرهٔ) مفروض، رسم شده به‌حساب می‌آوریم.

۱۱۷. در ارتباط با این روش عملی رسم، می‌توان اصل موضوعی را که دریادداشت قبل آوردیم، درصورت لزوم، به‌صورت دیگری تنظیم کرد:

اگر نقطهٔ P، خط راست g، خط راست (یا دایرهٔ) k و، بالاخره، پاره خط s مفروض یا رسم شده باشند، آن‌وقت، دونقطهٔ واقع بر g و k را که با P بریك خط راست قرار دارند وفاصلهٔ بین آن‌ها برابر s است، مفروض به‌حساب می‌آوریم.

این شرط نسبتاً مفصل، کاملاً پاسخ‌گوی حرکت عملی پاره‌خط s بین خط راست g و خط‌راست (یا دایرهٔ) k است، به‌نحوی که امتداد آن از P بگذرد.

قبول این اصل موضوع، مارا ازاثبات دقیق‌بودن رسم، معاف می‌کند.

زدی‌تن (*Zeuthen*)، مورخ ریاضیات، ثابت‌کرده‌است که، یونانیان باستان، از پاره‌خط متحرك هم، درکنار پرگار و خط‌کش، به‌عنوان‌وسیله‌ای برای رسم، استفاده می‌کرده‌اند.

۱۱۸. از نقطه نظر صوری، این روش متناظر با این شرط است که: اگر نقطه‌های A، D وخط‌های راست g، f مفروض باشند، نقطه‌های BوC را رسم شده به‌حساب آوریم.

۱۱۹. مکان هندسی نقطه‌های برخورد نیم‌خط‌های متناظر دو دستهٔ تصویری، یك مقطع مخروطی است. این‌که، در این حالت، یك هذلولی متساوی‌الساقین داریم، می‌توان باتکیه براین مطلب‌ثابت‌کرد که، دردسته‌های

A و O، دو زوج نیم‌خط مـوازی بـا هم وجود دارد و، در نتیجه، منحنی دارای دونقطهٔ بی‌نهایت دور حقیقی است و مجانبهای منحنی، موازی با نیم خطهای h_1 و h_2 است، که برهم عمودند.

۱۲۰ یادداشت ۱۱۶ را ببینید.

۱۲۱. روشن است کـه این وسیله را می‌توان متناظر بـا شرط زیر دانست: بـا مفروض بودن یك زاویه، خطهای راستی که آن‌را به سه بخش برابر تقسیم می‌کنند، مفروض‌اند.

۱۲۲. از آن‌جا که داریم:

$$۴y^۲=u^۲+v^۲+w^۲+۲(uv+uw+vw)$$

بنا براین

$$uv+uw+vw=۲y^۲+A$$

که اگر آن‌را مجذور کنیم، به‌دست می‌آید:

$$u^۲v^۲+u^۲w^۲+v^۲w^۲=(۲y^۲+A)^۲-۲uvw(u+v+w)=$$

$$=(۲y^۲+A)^۲+۴BY=۴(y^۴+Ay^۲+By)+A^۲=A^۲-AC$$

۱۲۳. و این، پاسخ‌گوی این اصل موضوع است که: اگر نقطه‌هـای A، B، C، D، E را مفـروض بگیریم، نقطه‌هـای X و Y هم مفروض به‌حساب می‌آیند.

۱۲۴. مثلاً، می‌تـوانید به‌مجلهٔ «آشتی بـا ریاضیات»، شمارهٔ ۱۳، سال سوم، اسفند ۱۳۵۸ مراجعه کنید.

پایان

۱۶۰۰ ریال